esc 2007 option économique corrigé rapide

exercice 1

1 (a) C'est clair : pour fabriquer $f(M)$, on remplace chaque terme de la diagonale par la demi-somme de termes de ladite diagonale, et idem pour l'« anti-diagonale ».
On vérifie sans peine que pour tout M, M' dans $\mathbf{M_2(R)}$ et tout x dans $\mathbf{R}$, on a
$f(M+M') = f(M) + f(M')$; $f(xM) = xf(M)$; $f(M) \in \mathbf{M_2(R)}$,
ce qui permet d'affirmer que f est un endomorphisme de $\mathbf{M_2(R)}$.
(**b**) $f(E_1) = f(E_2) = \frac{1}{2}(E_1 + E_4)$; $f(E_3) = f(E_4) = \frac{1}{2}(E_2 + E_3)$
d'où la matrice A, par définition de la matrice associée à un endomorphisme dans une base donnée.
2 (a) On résoud $f(M) = 0$, avec $M = x + yE_2 + zE_3 + tE_4$. Après multiplication par 2, cela donne le système d'équations $x + t = 0$, $y + z = 0$, soit $t = -x, z = -y$, donc les solutions sont $M = x(E_1 - E_4) + y(E_2 - E_3)$, ce qui prouve que $\ker f = \text{Vect}(E_1 - E_4, E_2 - E_3)$.
La famille $E_1 - E_4, E_2 - E_3$ étant libre ($x(E_1 - E_4) + y(E_2 - E_3) = 0 \Rightarrow x = y = 0$), nous tenons une base de $\ker f$, qui est donc de dimension 2.
(b) $\text{Im}\, f$ est engendré par les vecteurs-colonnes de A, c'est à dire par $\frac{1}{2}I$ et $\frac{1}{2}J$. I et J étant deux vecteurs de $\text{Im}\, f$, formant une famille libre, et $\text{Im}\, f$ étant de dimension 2 d'après la formule du rang, on enconclut que (I, J) est une base de $\text{Im}\, f$.
3 (a) $A^2 - A = 0$.
(b) A admet $X^2 - X$ pour polynôme annulateur. Ce polynôme a pour seules racines 0 et 1, ce sont donc les seules valeurs propres possible pour f.
0 est valeur propre de f, puisque le noyau $\ker f$ n'est pas réduit à 0.
(c) Il est clair que si $f(M) = M$, alors M est l'image d'une matrice par f, donc $M \in \text{Im}\ f$.
Réciproquement,si $M \in \text{Vect}(I, J)$, alors $M = xI + yJ$, donc
$f(M) = xf(I) + yf(J) = xI + yJ = M$
On a donc $M = f(M) \Leftrightarrow M = \text{Vect}(I, J)$. Cela prouve que 1 est valeur propre de f, avec $\text{Vect}(I, J)$ comme sous-espace propre associé.
4 (a) C est une famille libre :
$x(E_1 - E_4) + y(E_2 - E_3) + zI + tJ = 0 \Leftrightarrow$
$x(E_1 - E_4) + y(E_2 - E_3) + z(E_1 + E_4) + t(E_2 + E_3) = 0 \Leftrightarrow$
$(x + z)E_1 + (y + t)E_2 + (-y + t)E_3 + (-x + z)E_4 = 0 \Leftrightarrow$
$x + z = y + t = -y + t = -x + z = 0$ car (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathbf{M_2(R)}$.
(On peut aussi calculer sur les matrices explicitées.) Comme $\mathbf{M_2(R)}$ est de dimension 4, cela prouve que C est une base de $\mathbf{M_2(R)}$.
(b) D'après 2 (a) et 3 (c), la matrice D est la matrice diagonale de diagonale 0 0 1 1
(c) On cherche a, b, c, d tels que
$M = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = a(E_1 - E_4) + b(E_2 - E_3) + cI + dJ$
Mais $f(M) = cI + dJ = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, donc $c = 6$ et $d = 2$. Puis :
$M - f(M) = a(E_1 - E_4) + b(E_2 - E_3) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$
donc $a = -3$ et $b = 5$.
Et un bon point pour ceux qui ont étudié l'exercice d'algèbre linéaire edhec 2007 !

exercice 2

$f_n(x) = nx - \mathrm{e}^{-x}$

1. (a) f_n est dérivable sur **R** comme somme de deux fonctions dérivables sur **R**, et $f_n'(x) = n + e^{-x}$

(b) Aucun problème : f est strictement croissante, $\lim_{-\infty} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
Il résulte alors du théorème de la bijection monotone que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n.

(c) $f_n(0) = -1 < 0$; $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} > 0$; f_n est strictement croissante. Donc
$0 < u_n < \dfrac{1}{n}$

(d) Il en résulte, par encadrement, que (u_n) converge vers 0. Par définition de u_n :
$nu_n - \mathrm{e}^{-u_n} = 0$, donc $u_n = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n}$. u_n tend vers 0, donc e^{-u_n} vers 1, donc est équivalent à 1, et donc u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$.

$g(x, y) = 2\mathrm{e}^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$; $h(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 2x^2$

2. (a) g est une somme de fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, g est donc de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$.

(b) $g_x'(x, y) = -2\mathrm{e}^{-x} + 6x - 2y$; $g_y'(x, y) = -2x + 2y$

(c) (x, y) est un point critique pour g ssi $p = q = 0$, ce qui donne
$-2\mathrm{e}^{-x} + 4x = 0$ et $x = y$; $\mathrm{e}^{-2x} - 2x = 0$ et $x = y$; $x = u_2$ et $y = u_2$

(d) $r = 2\mathrm{e}^{-x} + 6$; $s = -2$; $t = 2$
En (u_2, u_2), $p = q = 0$, $rt - s^2 = (2\mathrm{e}^{-u_2} + 6)2 - 4 > 0$, $t > 0$, donc g présente en M un minimum local, de valeur
$g(M) = g(u_2, u_2) = 2\mathrm{e}^{-u_2} + 3u_2^2 - 2u_2^2 + u_2^2 = 2\mathrm{e}^{-u_2} + 2u_2^2 = 2(2u_2) + 2u_2^2$
Cette dernière égalité car $u_n = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n}$, avec $n = 2$; d'où la conclusion : $g(M) = 2u_2(2 + u_2)$.

3. (a) $g(x, y) \geq h(x) \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2 \geq 2\mathrm{e}^{-x} + 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$. C'est bon !

(b) $h'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + 4x = 2(-\mathrm{e}^{-x} + 2x)$; $h''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 4 > 0$. h' est donc strictement croissante sur **R**. Or h' s'annule en u_2, donc h' est > 0 sur $[u_2 ; +\infty[$, négative sur $]-\infty ; u_2[$. h atteint donc son minimum en u_2.

(c) Pour tout (x, y) dans $\mathbf{R}^2$,
$g(x, y) \geq h(x) \geq h(u_2) = 2\mathrm{e}^{-u_2} + 2u_2^2 = 2u_2(2 + u_2) = g(M)$
$g(M)$ est donc un minimum global pour g.

4. (a) Pour la fonction : `f :=2*x-exp(-x) ;`

(b) Pour la condition : `if f((a+b)/2))>0`

On applique la méthode de dichotomie à f_2 sur l'intervalle [0 ; 1]. Or u_2 est l'unique solution de $f_2(x) = 0$ et u_2 appartient à [0 ; 1]. A chaque passage dans la boucle l'intervalle [a,b] voit sa longueur divisée par 2. Sa longueur intitiale est 1 et il y a 10 itérations, donc la longueur finale est $1/2^{10}$, donc plus petite que 0,001 : u_2 est coincé entre a et b, donc a est une valeur approchée de u_2…

exercice 3

Partie A

1. X est le temps d'attente du premier succès (contrôle négatif, avec probabilité 2/5, attention), lors d'épreuves identiques et indépendantes. Donc X suit la loi géométrique de paramètre 2/5.

$X(\Omega) = \mathbf{N}^*$; $\forall n \in \mathbf{N}^*, \mathrm{P}(X = n) = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \frac{2}{5}$; $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{2}$; $\mathrm{V}(X) = \dfrac{\frac{3}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \dfrac{15}{4}$

2 (a) $Y(\Omega)=\mathbf{N}\backslash\{0\,;1\}$. Avec $(X=3)$ et $(Y=5)$, on a eu P P N P N. Par indépendance des tests, on a donc :

$$\mathrm{P}(X=3\cap Y=5)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{72}{5^5}$$

(b) Le jour du deuxième test négatif est nécessairement plus grand que le jour du premier, donc $\mathrm{P}(X=i\cap Y=j)=0$ si $i\geq j$.

Si $i<j$, l'événement $X=i\cap Y=j$ est : « $i-1$ tests négatifs, 1 test positif, puis $j-i-1$ test positifs, puis 1 test négatif (allez, on nous souffle la réponse…) Par indépendance, on obtient donc $\mathrm{P}(X=i\cap Y=j)=\left(\frac{3}{5}\right)^{i-1}\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{j-i-1}\times\frac{1}{5}$

(c) On utilise la formule des probabilités totales avec le sce $(X=i)_{i\in\mathbf{N}^*}$. En fait la somme s'arrête à $i=j-1$, les autres probabilités étant nulles :

$$\mathrm{P}(Y=j)=\sum_{i=1}^{j-1}\mathrm{P}(X=i\cap Y=j)=\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{i-1}\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{j-i-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{2}{5}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{j}\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{i-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{-i-1}=\frac{2}{25}\left(\frac{4}{5}\right)^{j}\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{i-1}\left(\frac{5}{4}\right)^{i+1}$$

$$=\frac{2}{25}\left(\frac{4}{5}\right)^{j}\left(\frac{5}{4}\right)^{2}\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{i-1}\left(\frac{5}{4}\right)^{i-1}=\frac{1}{8}\left(\frac{4}{5}\right)^{j}\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}=\frac{1}{8}\left(\frac{4}{5}\right)^{j}\sum_{k=0}^{j-2}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{4}{5}\right)^{j}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{8}\left(\frac{4}{5}\right)^{j}4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{j}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{j}\left(\frac{3}{4}\right)^{j}\frac{4}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{j}-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{j}$$

Ouf !

Partie B

1. f est ≥ 0, continue sur $\mathbf{R}\backslash\{a\}$, et

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{X\to+\infty}\int_a^X\frac{3a^3}{x^4}\mathrm{d}x=\lim_{X\to+\infty}\int_a^X 3\mathrm{a}^3x^{-4}\mathrm{d}x=\lim_{X\to+\infty}\left[3a^3\frac{x^{-3}}{-3}\right]_a^X$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\left[-\frac{a^3}{x^3}\right]_a^X=\lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{a^3}{X^3}+\frac{a^3}{a^3}\right)=1$$

donc f est une densité de probabilité.

2. Sous réserve de convergence, et car f est nulle en dehors de $[a\,;\,+\infty[$:

$$\mathrm{E}(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}x\frac{3a^3}{x^4}\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{3a^3}{x^3}\mathrm{d}x=\lim_{X\to+\infty}\int_a^X\frac{3a^3}{x^3}\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_a^X\frac{3a^3}{x^3}\mathrm{d}x=\int_a^X 3a^3x^{-3}\mathrm{d}x=\left[3a^3\frac{x^{-2}}{-2}\right]_a^X=\left[-\frac{3a^3}{2x^2}\right]_a^X=-\frac{3a^3}{2X^2}+\frac{3a}{2}\xrightarrow[X\to+\infty]{}\frac{3a}{2}$$

D'où le résultat, $\mathrm{E}(T)=\frac{3a}{2}$. Pour la variance, on commence par calculer $\mathrm{E}(T^2)$:

$$\mathrm{E}(T^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}x^2\frac{3a^3}{x^4}\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{3a^3}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{X\to+\infty}\int_a^X\frac{3a^3}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$\int_a^X \frac{3a^3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^X 3a^3x^{-2}\mathrm{d}x = \left[3a^3\,\frac{x^{-1}}{-1}\right]_a^X = \left[-\frac{3a^3}{x}\right]_a^X = -\frac{3a^3}{X} + 3a^2 \xrightarrow[X\to+\infty]{} 3a^2$$

Donc $\mathrm{E}(T^2) = 3a^2$, T admet une variance, et

$$\mathrm{V}(T) = \mathrm{E}(T^2) - \mathrm{E}(T)^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

3 (a) Pour $x \leq a$, $F(x) = 0$ car f est nulle sur l'intervalle $]-\infty, a]$. Pour $x \geq a$, les calculs ont déjà été faits, et on peut dire :

$$F(x) = 0 \text{ si } x \leq a \quad ; \quad F(x) = 1 - \frac{a^3}{x^3} \text{ si } x \geq a$$

(**b**)$\mathrm{P}(T > 2a) = 1 - F(2a) = 1 - \left(1 - \dfrac{a^3}{(2a)^3}\right) = \dfrac{1}{8}$

$$\mathrm{P}_{(T>2a)}(T > 6a) = \frac{\mathrm{P}(T > 6a \cap T > 2a)}{\mathrm{P}(T > 2a)} = \frac{\mathrm{P}(T > 6a)}{\mathrm{P}(T > 2a)} = \frac{1 - F(6a)}{1 - F(2a)} = \frac{\frac{1}{6^3}}{\frac{1}{2^3}} = \frac{1}{27}$$

4 (a) Z_n est un estimateur sans biais de a car, d'après la linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(Z_n) = \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(T_k) = \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n}\frac{3a}{2} = \frac{2}{3n}\,n\frac{3a}{2} = a$$

(b) Z_n est sans biais, donc son risque quadratique est égal à sa variance, et en utilisant la formule $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$, puis le fait que les T_k sont indépendantes :

$$r(Z_n) = \mathrm{V}(Z_n) = \left(\frac{2}{3n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(T_k) = \frac{4}{9n^2}\,n\frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{3n}$$