E.S.C **Concours 2002**

Epreuve maths voie conomique

EXERCICE 1 : suite d'intégrales impropres.

On considère, pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{n \ln x}{n+1+nx^2} \qquad \text{pour tout réel} x \text{ strictement positif.}$$

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par :

$$h(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \qquad \text{pour tout } x \text{ strictement positif.}$$

1. Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.

2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

   (b) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\ dx$ est convergente.

   Dans toute la suite de l'exercice on note alors K l'intégrale impropre : $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\ dx$.

3. (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ que $K = -\displaystyle\int_0^1 h(u)\ du$.

   (b) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\ dx$ converge et est égale à $2K$.

   (c) En déduire également que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\ dx$ converge et vaut 0.

4. (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$.
   En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$.

   (b) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $h(x) - f_n(x) = \dfrac{h(x)}{n+1+nx^2}$.

(c) En déduire successivement :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant \frac{K}{n+1}$$

$$-\frac{K}{n+1} \quad \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant 0$$

(d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = 0$.

EXERCICE 2 : calcul matriciel et algèbre linéaire.

On considère un paramètre réel m, et les matrices suivantes :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que A_m^2 et A_m^3 ne dépendent plus de m, et vérifier que : $A_m^3 = 2.A_m^2$.

   (b) On suppose que λ est une valeur propre de A_m et que X est un vecteur propre associé à cette valeur propre λ. Montrer que : $(\lambda^3 - 2\lambda^2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire que : $S_p(A_m) \subset \{0, 2\}$.

2. Dans cette série de questions on étudie le cas $m = 0$ et on cherche à diagonaliser A_0.

   (a) Montrer que les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de A_0.

   (b) Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de A_0.

   (c) Montrer que A_0 est diagonalisable, et donner une matrice carrée inversible Q et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ telles que $A_0 = QDQ^{-1}$.

   (d) Montrer l'existence de deux réels a et b tels que $A_0^2 = aA_0 + bI_3$.

3. Dans cette série de questions, on suppose que le paramètre m est <u>non nul</u>. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{\not\models}$ et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\not\models}$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est A_m.

(a) Montrer que les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de f_m .

(b) Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de f_m
.
La matrice A_m est-elle diagonalisable ?

(c) On pose les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad ; \quad v = f_m(u) \quad ; \quad w = e_1 + e_2 - e_3 = (1, 1, -1).$$

Calculer v, $f_m(v)$ et $f_m(w)$.

(d) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et former la matrice de l'endomorphisme f_m relativement à cette base.

(e) En déduire une matrice carrée inversible P_m telle que $P_m^{-1} A_m P_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(f) Existe-t-il des réels c et d tels que $A_m^2 = cA_m + dI_3$?

EXERCICE 3 : v.a.r. usuelles, fonctions de deux variables, optimisation.

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y telles que :
X suit une loi binomiale de paramètres n et x (notée $B(n, x)$ avec $x \in]0, 1[$).
Y suit une loi binomiale de paramètres n et y (notée $B(n, y)$ avec $y \in]0, 1[$).
On pose alors Z la variable aléatoire discrète définie par l'égalité : $Z = 2n - X - Y$.

1. (a) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs possibles de Z.

   (b) Exprimer en fonction de n, x et y les probabilités :

$$P(Z = 0) \quad ; \quad P(Z = 2n) \quad ; \quad P(Z = 2n - 1) \quad ; \quad P(Z = 1)$$

2. (a) Donner les espérances et variances suivantes : $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, et en déduire $E(X^2)$ et $E(Y^2)$.

   (b) On pose W la variable aléatoire définie par $W = XYZ$.
   Montrer que l'espérance de W est donnée par : $E(W) = n^2(n - 1)xy(2 - x - y)$.

3. On pose $D =]0,1[\times]0,1[$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :
$$f(x,y) = xy(2-x-y) \text{ pour tout couple } (x,y) \text{ de } D$$

   (a) Justifier que f est de classe C^2 sur D.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f, en déduire le seul point (x_0, y_0) de D (appelé " point critique ") susceptible de réaliser un extremum local pour f.

   (c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f, et montrer que f admet un maximum local en (x_0, y_0) de valeur $\dfrac{8}{27}$.

   (d) Montrer que pour tout couple (x,y) de D :
$$f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(y-\frac{8}{3}\right) - y\left(x+\frac{1}{2}y-1\right)^2$$
   En déduire que ce maximum local est un maximum global de f sur D.

4. On suppose que les variables X, Y définies plus haut représentent, en centimètres, la largeur et la longueur d'une brique, dont la hauteur Z est telle que la somme des côtés, $X+Y+Z$, est toujours égale à 56 cm, et de volume XYZ.

   (a) Quelles sont les valeurs que l'on doit donner aux paramètres x et y pour que le volume moyen de la brique soit maximal ?

   (b) Montrer que ce volume moyen maximum est de 6272 cm^3.