MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - EMLyon 2024

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

Exercice 1

Partie A : Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad x'(t) = -x(t) + e^t,$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. a) Le cours permet de résoudre directement l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$:

   Les solutions sont les fonctions $x: \ t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda.e^{-t}$, où λ est un réel quelconque.

   b) On cherche ici une fonction x_0 de la forme $x_0: \ t \mapsto (at+b)e^{-t}$ avec a et b deux constantes réelles, qui soit une solution de (E).

   Pour tout réel t : $\quad x_0'(t) = a.e^{-t} + (at+b).(-e^{-t}) = (a-b-at)e^{-t}$, et on doit avoir :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_0'(t) = -x_0(t) + e^{-t} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad (a-b-at)e^{-t} = (-at-b+1)e^{-t}\\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \ a-b-at = -at-b+1.\end{aligned}$$

   Par identification des coefficients, a doit donc être égal à 1, et b peut rester quelconque.
   On prend $b=0$, et alors $x_0: \ t \in \mathbb{R} \mapsto te^{-t}$ est une solution particulière de (E).

   c) D'après le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants : les solutions de (E) sont toutes les fonctions

$$x: \ t \in \mathbb{R} \mapsto te^{-t} + \lambda e^{-t} = (\lambda + t)e^{-t}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Toute solution de (E) est en effet la somme d'une solution de l'équation homogène, et d'une solution particulière de l'équation (E).

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S): \quad \begin{cases} x'(t) & = -x(t) + y(t) \\ y'(t) & = -y(t) \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. a) Il est clair qu'en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ pour tout réel t, on a :

$$(S) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice A du système est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, et par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1\}}\ .$$

Le rang de $A - (-I_2) = A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est égal à 1, donc d'après le théorème du rang, $\dim E_{-1}(A) = 2 - 1 = 1 < 2$: A n'est donc *pas* diagonalisable.

b) Le théorème du cours (souvent appelé "théorème de Cauchy-Lipschitz") assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy constitué du système différentiel (S) et des conditions à l'origine $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

c) D'après la question 1. : puisque $y(t) = -y'(t)$ pour tout réel t, alors il existe un réel λ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{-t}$. La condition $y(0) = 1$ donne $\lambda = 1$, donc $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{-t}$.

La première ligne du système (S) devient alors : $x'(t) = -x(t) + e^{-t}$, donc d'après 1. il existe un réel $\tilde{\lambda}$ tel que $x(t) = (\tilde{\lambda} + t)e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La condition $x(0) = 1$ se traduit alors par l'équation : $(\lambda + 0)e^0 = 1 \iff \lambda = 1$, donc $x(t) = (1 + t)e^{-t}$ pour tout réel t.

La solution du problème de Cauchy étudié dans cette question est donc définie par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} x(t) = (1+t)e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}}\ .$$

d) Pour étudier la convergence de la solution (x, y), on calcule les limites :

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} (1+t)e^{-t} = 0 \text{ et } \lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0.$$

La trajectoire de la solution (x, y) converge donc vers le point d'équilibre $(0, 0)$.

3. Le script `Python` ci-dessous produit le graphique de l'énoncé représentant la trajectoire $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ pour $t \in [-2\,;10]$: il suffit pour cela de définir les vecteurs `x` et `y` des images par les fonctions obtenues à la question précédente, des points de référence contenus dans le vecteur `T`.

La trajectoire s'affiche ensuite avec la fonction `plot`, qui prend pour premier argument le vecteur d'abscisses `x`, et pour second argument le vecteur `y`.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2,10,200)
x = [(t+1)*np.exp(-t) for t in T]
y = [np.exp(-t) for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

On peut d'ailleurs effectivement observer la convergence de la trajectoire de la solution vers le point d'équilibre $(0, 0)$.

Partie B : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. a) Puisque $k \geqslant 1 > 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} kx = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{kx} = +\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x)$.
On a aussi : $\lim\limits_{x \to -\infty} kx = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$: par croissances comparées, on a encore $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{kx} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x)$.

b) La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions qui le sont, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k'(x) = 1.e^{kx} + (x+1).k.e^{kx} = (kx+k+1).e^{kx}.$$

Pour tout réel x, $e^{kx} > 0$ donc le signe de $f_k'(x)$ est celui de $kx+k+1$.
Comme $kx+k+1 > 0 \iff kx > -k-1 \overset{k>0}{\iff} x > -1 - \frac{1}{k}$, on en déduit le tableau de variations de f_k sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-1-1/k$		-1		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$				$+$	
f_k	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

L'énoncé demandait de préciser les valeurs : $f_k(-1) = 0$ et $f_k(0) = 1$.

5. a) Étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$, revient à étudier le signe de $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ suivant les valeurs du réel x.

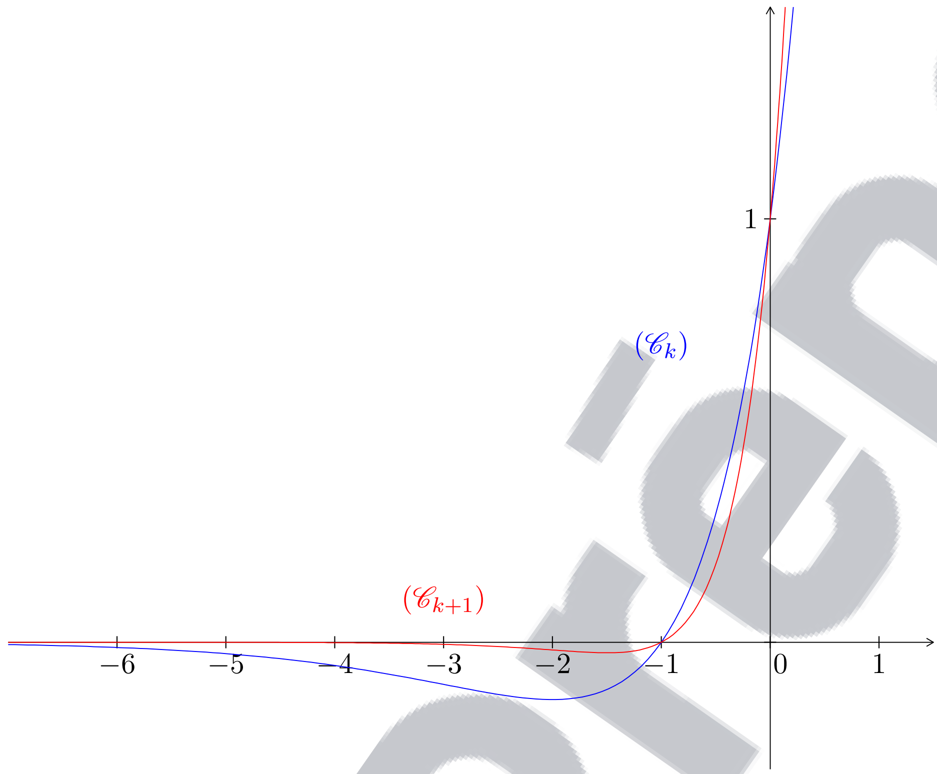
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)e^{(k+1)x} - (x+1)e^{kx} = (x+1)e^{kx}(e^x - 1).$$

On dresse alors le tableau de signe d'un produit, sachant que :
$x+1 > 0 \iff x > -1$, $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$ et e^{kx} reste toujours strictement positif :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_{k+1}(x) - f_k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}_{k+1}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_k$ sur les intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[0\,;+\infty[$, et au-dessous sur $]-1\,;0[$.

b) En tenant compte des variations des fonctions f_k et f_{k+1}, et des positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$, on en déduit les tracés :



Partie C : Étude d'une suite implicite

6. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'étude de la fonction f_k fait apparaître que sur $]-\infty\,;-1]$, la fonction est de signe négatif, donc puisque $k \geqslant 1$, l'équation $f_k(x) = k$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

   Sur $[-1\,;+\infty[$:

   - la fonction f_k est **continue** car dérivable
   - la fonction f_k est **strictement croissante**
   - le réel $k \in \mathbb{N}^*$ **appartient à l'intervalle-image** $[f_k(-1)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)[= [0\,;+\infty[$.

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_k(x) = k$ admet donc une unique solution u_k sur $[-1\,;+\infty[$, qui est aussi d'après ce qui précède, l'unique solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.

   b) On cherche ici un réel u_1 tel que : $f_1(u_1) = 1 \iff (u_1+1)e^{u_1} = 1$. Il est évident que le réel 0 convient : par unicité de la solution, on a donc $\boxed{u_1 = 0}$.

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comparons les images de 0, u_k et $\dfrac{\ln(k)}{k}$ par la fonction f_k :

$$f_k(0) = 1,\ f_k(u_k) = k \text{ et } f_k\Big(\frac{\ln(k)}{k}\Big) = \Big(\frac{\ln(k)}{k}+1\Big)e^{k\times\frac{\ln(k)}{k}} = \Big(\frac{\ln(k)}{k}+1\Big)\times\underbrace{e^{\ln(k)}}_{=k} = \ln(k)+k,$$

donc puisque $k \geqslant 1$:

$$f_k(0) \leqslant f_k(u_k) \leqslant f_k\Big(\frac{\ln(k)}{k}\Big).$$

Ces trois réels appartiennent à $[-1\,;+\infty[$ sur lequel f_k est strictement croissante, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{\ln(k)}{k}.$$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\ln(k)}{k} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement :

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{k\to+\infty} u_k = 0.$$

8. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le réel u_k est le seul qui vérifie l'égalité :

$$f_k(u_k) = k \iff (u_k+1)e^{ku_k} = k \iff \ln(u_k+1) + ku_k = \ln(k) \iff ku_k = \ln(k) - \ln(u_k+1)$$

$$\iff \boxed{u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k+1)}{k}}.$$

La première composition par le logarithme népérien est bien licite puisque $u_k + 1 \geqslant 1 > 0$.

b) De ce qui précède, on déduit que pour k assez grand ($k \geqslant 2$ pour avoir $\ln(k) > 0$) :

$$u_k \times \frac{k}{\ln(k)} = 1 - \frac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)},$$

où par continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{k\to+\infty} \ln(u_k+1) = \ln(1) = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)} = 0,$$

donc $\lim\limits_{k\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)}$, et par encadrement :

$$\lim_{k\to+\infty} u_k \times \frac{k}{\ln(k)} = 1, \quad \text{ce qui donne bien l'équivalent :} \quad \boxed{u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(k)}{k}}.$$

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(k)}{k} \geqslant 0$ et puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln(k) = +\infty$, alors $\dfrac{1}{k} = o\Big(\dfrac{\ln(k)}{k}\Big)$.

Or la série $\sum\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k}$ diverge : c'est la série harmonique, cas particulier d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$.

Le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs assure alors que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{k}$ diverge.

On peut alors enchaîner avec le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, qui assure que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ est de même nature que la précédente, c'est-à-dire divergente.

Exercice 2

On considère la matrice carrée d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\mathscr{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathscr{C} = \big\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\ AM = MA\big\}.$$

Partie A : Étude de A et de $\mathscr{C}$

1. Le calcul matriciel donne : $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, donc :

$$-A^2 = I_2 \iff -A \times A = I_2,$$

ce qui prouve que A est inversible, d'inverse : $\boxed{A^{-1} = -A}$.

2. Le calcul précédent s'écrit aussi : $A^2 + I_2 = 0_2$, donc $P(x) = x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A.

Les valeurs propres possibles de A figurent donc parmi les racines de P. Or : $P(x) = 0 \iff x^2 = -1$ est impossible pour x réel, car x^2 est toujours positif !

Ainsi P n'a pas de racine réelle, et par conséquent A ne possède aucune racine réelle : cette matrice ne peut donc pas être diagonalisable.

3. L'ensemble $\mathscr{C}$ est inclus par définition dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soient (M, N) deux matrices quelconques de $\mathscr{C}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$(\lambda.M + N)A = \lambda.MA + NA \overset{(*)}{=} \lambda.AM + AN = A(\lambda.M + N),$$

$(*)$ car M et N appartiennent à $\mathscr{C}$, donc $\lambda.M + N \in \mathscr{C}$.

L'ensemble $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire : c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On résout :

$$AM = MA \iff \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = d \\ c = -b \end{cases}$$

par identification des coefficients, et en tenant compte des lignes redondantes.

Ainsi : $\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

b) Le résultat précédent peut s'écrire :

$$\mathscr{C} = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(I_2, -A)\boxed{= \mathrm{Vect}(I_2, A)}.$$

La famille (I_2, A) est donc une famille génératrice du sous-espace vectoriel $\mathscr{C}$; c'est aussi une famille libre puisque I_2 et A sont deux matrices non colinéaires, donc c'est une base de $\mathscr{C}$ (qui est donc de dimension 2).

5. Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathscr{C}$.

a) Puisque $AM = MA$ et $AN = NA$, alors par associativité du produit matriciel :

$$(MN)A = M(NA) = M(AN) = (MA)N = (AM)N = A(MN),$$

ce qui prouve que le produit MN appartient encore à $\mathscr{C}$.

b) Puisque M et N appartiennent à $\mathscr{C} = \text{Vect}(I_2, A)$, alors il existe 4 réels (a,b,c,d) tels que $M = a.I_2 + b.A$ et $N = c.I_2 + d.A$, de sorte que :

$$MN = ac.I_2 + (ab+bc)A + bd.A^2 = NM,$$

ce qui prouve que M et N commutent en tant que polynômes de la matrice A.

6. Soit M une matrice non nulle de $\mathscr{C}$: elle est donc de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, avec a et b deux réels.

Alors : $\det(M) = a^2 + b^2$ est non nul puisque l'un des deux réels a ou b au moins est non nul, ce qui implique que a^2+b^2 est strictement positif.

La matrice A est donc inversible, d'inverse donné par la formule du cours :

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{a}{a^2+b^2}.I_2 + \frac{b}{a^2+b^2}.A,$$

qui appartient bien aussi à $\mathscr{C}$ comme combinaison linéaire de I_2 et A.

Partie B : Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathscr{C}$

On fixe un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels :

$$P(x) = x^2 + ux + v \quad \text{avec } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $\Delta = u^2 - 4v$ son discriminant.

7. Soit $M = a.I_2 + b.A$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

a) D'après les règles du produit matriciel :

$$M^2 = (a.I_2+b.A)(a.I_2+b.A) = a^2.I_2^2+ab.I_2A+ba.AI_2+b^2.A^2 = a^2.I_2+2ab.A-b^2.I_2 = (a^2-b^2).I_2+2ab.A$$

b) De ce qui précède, on déduit :

$$P(M) = 0_2 \iff M^2 + u.M + v.I_2 = 0_2 \iff (a^2-b^2+ua+v).I_2 + (2ab+ub).A = 0_2$$

$$\iff \begin{cases} a^2-b^2+ua+v & = 0 \\ 2ab+ub & = 0 \end{cases},$$

la dernière équivalence venant du fait que la famille (I_2, A) est libre : une combinaison linéaire de ces deux matrices est nulle si et seulement si les coefficients sont nuls.

8. a) On suppose ici que $\Delta \geqslant 0$: l'équation $a^2+ua+v=0$ admet donc au moins une solution a_0, et dans ce cas en effet $(a_0, 0)$ est solution du système, puisqu'on a alors : $\begin{cases} a^2 - 0^2 + ua_0 + v = 0 \\ 2a_0 \times 0 + u \times 0 = 0 \end{cases}$.

b) On suppose ici que $\Delta < 0$. En supposant $b \neq 0$, la deuxième ligne du système se réécrit : $(2a+u)b = 0 \iff 2a+u = 0 \iff a = -\frac{u}{2}$, et le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{u^2}{4} - b^2 - \frac{u^2}{2} + v = 0 \\ a = -\frac{u}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} b^2 = v - \frac{u^2}{4} \\ a = -\frac{u}{2} \end{cases} \iff b^2 = \frac{4v-u^2}{4} \iff b^2 = -\Delta$$

Puisque $-\Delta > 0$, on trouve alors $b = \pm\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $a = -\dfrac{u}{2}$, donc le système admet bien au moins une solution avec $b \neq 0$.

Ainsi dans tous les cas, on peut trouver deux réels a et b tels que $P(M) = M^2 + u.M + v.I_2 = 0_2$.

9. On envisage ici le cas où $P(x) = x^2 + x + 1$, c'est-à-dire $u = v = 1$. Dans ce cas, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, et d'après 8.b) : en posant $a = -\frac{u}{2} = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on définit la matrice

$$\boxed{M = -\frac{1}{2}.I_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}.A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}.$$

D'après ce qui précède, M vérifie $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

On peut le contrôler (ce n'était pas obligatoire ici) en calculant :

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow M^2 + M + I_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie C : Un endomorphisme bijectif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AMA.$$

10. Notons que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = AMA$ appartient bien à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme produit de trois matrices carrées d'ordre 2.

Pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et tout réel λ :

$$\varphi(\lambda.M + N) = A(\lambda.M + N)A = (\lambda.AM + AN)A = \lambda.AMA + ANA = \lambda.\varphi(M) + \varphi(N),$$

donc φ est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même : c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

11. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\varphi \circ \varphi(M) = \varphi(AMA) = A(AMA)A = A^2MA^2 = -I_2M(-I_2) = M,$$

donc : $\boxed{\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}}$.

Par conséquent, on peut directement en déduire que φ est bijectif, et que $\boxed{\varphi^{-1} = \varphi}$.

12. a) Les calculs matriciels donnent :

$$\varphi(E_1) = AE_1A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_4,\ \varphi(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_3,\ \varphi(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2,\ \varphi(E_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_1,$$

donc la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La matrice B est clairement symétrique, donc elle est diagonalisable d'après le théorème admis du cours.

De plus, le fait que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ se traduit matriciellement par le fait que $B^2 = I_4$ $\Longleftrightarrow B^2 - I_4 = 0_4$, et donc que $P(x) = x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de B.

Par conséquent, toute valeur propre de B est racine de P : $\quad \mathrm{Sp}(B) \subset \{-1 ; 1\}$.

Réciproquement, il s'agit de prouver que 1 et -1 sont bien valeurs propres de B (ou de φ) :

- On a vu que $\varphi(E_2) = E_3$ et $\varphi(E_3) = E_2$, donc par linéarité de φ, $\varphi(E_2 + E_3) = E_2 + E_3$, ce qui signifie que 1 est bien valeur propre de φ et donc de B, de vecteur propre associé $E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice non nulle.
- On a vu aussi que $\varphi(E_1) = -E_4$ et $\varphi(E_4) = -E_1$, donc $\varphi(E_1 + E_4) = -(E_1 + E_4)$, ce qui est en fait une autre façon d'écrire, puisque $E_1 + E_4 = I_2$: $\varphi(I_2) = AI_2A = A^2 = -I_2$, donc -1 est bien valeur propre de φ et donc de B, de vecteur propre associé $I_2 \neq 0_2$.

Finalement, on a bien démontré : $\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{-1\,;1\}}$.

c) Calculons les deux sous-espaces propres $E_1(B)$ et $E_{-1}(B)$:

$$V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in E_1(B) \iff BV = V \iff \begin{pmatrix} -d \\ c \\ b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} d = -a \\ c = b \end{cases},$$

donc : $$E_1(B) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ -a \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(U_1, U_2).$$

Les deux vecteurs U_1 et U_2 forment une famille génératrice de $E_1(B)$ qui est également libre, puisque U_1 et U_2 sont non-colinéaires : (U_1, U_2) est donc une base de $E_1(B)$.

De même :

$$V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in E_{-1}(B) \iff BV = -V \iff \begin{pmatrix} -d \\ c \\ b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} d = a \\ c = -b \end{cases},$$

donc : $$E_{-1}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(U_3, U_4).$$

Les deux vecteurs U_3 et U_4 forment une famille génératrice de $E_{-1}(B)$ qui est également libre, puisque U_3 et U_4 sont non-colinéaires : (U_3, U_4) est donc une base de $E_{-1}(B)$.

Exercice 3

Partie A : Simulation informatique

1. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k suit clairement la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n = N\}$, puisque les tirages se font avec remise et qu'à chaque tirage, l'une des n boules de l'urne est choisie avec équiprobabilité.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k(\Omega) = [\![1\,;N]\!] \text{ et } \forall i \in [\![1\,;N]\!],\ \mathbf{P}(X_k = i) = \frac{1}{N}.$$

2. La fonction `ajout` définie par l'énoncé, teste si l'élément `x` passé en argument appartient à la liste `L`, l'autre argument de la fonction. Si ce n'est pas le cas, et uniquement sous cette condition, `x` est ajouté à `L`.

3. La fonction `Simul_T` complétée ci-dessous, simule la variable aléatoire T_i au sens où elle enchaîne les tirages jusqu'à ce que l'on ait obtenu i numéros différents parmi les N que contient l'urne.

```python
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while len(L)<i :    # tant qu'on n'a pas i numéros distincts
        x = rd.randint(1,N+1)  # on fait un tirage de plus
        ajout(L,x)             # voir la question précédente
        k = k+1                # on a fait un tirage de plus
    return k                   # on renvoie le nombre total de tirages
```

4. On suppose $N = 3$. Le script suivant calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`.

```python
s = 0
for j in range(100):
    s = s + Simul_T(3,2)
print(s/100)
```

Cette moyenne empirique donne une valeur approchée de l'espérance de la variable aléatoire T_2 (loi faible des grands nombres, sous réserve de démontrer que T_2 admet une espérance et une variance, ce qui est fait dans la suite).

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. La variable aléatoire T_2 donne le nombre de tirages nécessaires pour avoir obtenu deux numéros différents : il faut faire au moins deux tirages, et les tirages peuvent durer autant de temps que l'on veut, tant qu'on pioche toujours le même numéro :

$$T_2(\Omega) = [\![2\,;+\infty[\![.$$

En admettant qu'on finit presque sûrement par obtenir deux numéros distincts... ce qui sera implicitement prouvé à la question 8.

6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.

   a) L'événement $[T_2 = k] \cap [X_1 = 1]$ est réalisé si et seulement si les $k-1$ premiers tirages ont donné le numéro 1 (comme le premier), et le k-ième donne pour la première fois un des deux autres numéros (2 ou 3) :

$$[T_2 = k] \cap [X_1 = 1] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \cap \cdots \cap [X_{k-1} = 1] \cap [X_k \neq 1].$$

b) Les tirages successifs sont faits avec remise, donc peuvent être considérés mutuellement indépendants ; par conséquent :

$$\mathbf{P}\big([T_2=k]\cap[X_1=1]\big)=\mathbf{P}(X_1=1)\times\mathbf{P}(X_2=1)\times\cdots\times\mathbf{P}(X_{k-1}=1)\times\mathbf{P}(X_k\neq 1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3^k}.$$

c) Le premier tirage peut donner n'importe lequel des trois entiers 1, 2 et 3 ; les événements $\big([X_1=1],[X_1=2],[X_1=3]\big)$ forment un système complet, avec lequel la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbf{P}(T_2=k)=\mathbf{P}\big([T_2=k]\cap[X_1=1]\big)+\mathbf{P}\big([T_2=k]\cap[X_1=2]\big)+\mathbf{P}\big([T_2=k]\cap[X_1=3]\big)=3\times\frac{2}{3^k}=\frac{2}{3^{k-1}}$$

puisque les deux autres probabilités de la formule ont, selon le même principe, la même valeur qu'à la question précédente.

7. La variable aléatoire T_2 admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}k\mathbf{P}(T_2=k)$ est absolument convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, la convergence absolue équivaut à la convergence simple.

Pour tout entier $n\geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k\mathbf{P}(T_2=k)=2\sum_{k=2}^{n}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$

On reconnaît une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3}\in]-1\,;1[$, qui est donc convergente ; la variable aléatoire T_2 admet une espérance, qui vaut :

$$\mathbf{E}(T_2)=2\sum_{k=2}^{+\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-1\right)=2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-1\right)=2\left(\frac{9}{4}-1\right)\boxed{=\frac{5}{2}}.$$

8. La variable aléatoire $Z_2=T_2-1$ a pour univers-image $\mathbb{N}^*$, avec :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}(Z_2=k)=\mathbf{P}(T_2-1=k)=\mathbf{P}(T_2=k+1)=\frac{2}{3^k}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1},$$

ce qui prouve que Z_2 suit la loi géométrique de paramètre $p=\dfrac{2}{3}$.

La variable aléatoire Z_2 admet alors une espérance et une variance, qui valent :

$$\mathbf{E}(Z_2)=\frac{1}{p}=\frac{3}{2}\Longrightarrow\mathbf{E}(T_2)=\mathbf{E}(Z_2+1)=\mathbf{E}(Z_2)+1=\frac{5}{2}\text{ et }\mathbf{V}(T_2)=\mathbf{V}(Z_2+1)=\mathbf{V}(Z_2)=\frac{1-p}{p^2}=\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}\boxed{=\frac{3}{4}}$$

par linéarité de l'espérance et propriété de la variance : on a bien retrouvé la valeur de $\mathbf{E}(T_2)$.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N.

Décompositions de T_i

9. Soit $i\in[\![2\,;N]\!]$.

a) La variable aléatoire Z_i représente le temps d'attente d'un premier succès : obtenir un numéro qui ne fait pas partie des $(i-1)$ numéros déjà tirés, dans une suite d'épreuves de Bernoulli (les tirages après avoir obtenu $(i-1)$ numéros différents) identiques et indépendantes, de probabilité de succès $\dfrac{N-(i-1)}{N}$: la variable aléatoire Z_i suit bien la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N-i+1}{N}$.

b) D'après le cours sur la loi géométrique :

$$\mathbf{E}(Z_i)=\frac{N}{N-i+1}\quad\text{et}\quad\mathbf{V}(Z_i)=\frac{1-\frac{N-i+1}{N}}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2}=\frac{i-1}{N}\times\frac{N^2}{(N-i+1)^2}=\frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}.$$

Lorsque $i=1$: $\dfrac{N}{N-1+1}=1$ est bien l'espérance de la variable certaine $T_1=1$,

et $\dfrac{N(1-1)}{(N-1+1)^2}=0$ est sa variance.

10. Soit $i \in [\![1\,;N]\!]$; il est clair que :

$$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = T_1 + T_2 - T_1 + \cdots + T_n - T_{n-1} = T_n \quad \text{par télescopage.}$$

Loi de T_3

11. a) Soient ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$; les variables aléatoires Z_2 et Z_3 sont indépendantes d'après l'énoncé, et puisque Z_2 et Z_3 suivent chacune une loi géométrique, de paramètres respectifs $\dfrac{N-1}{N}$ et $\dfrac{N-2}{N}$:

$$\mathbf{P}\big([Z_2=\ell]\cap[Z_3=k]\big) = \mathbf{P}(Z_2=\ell)\times\mathbf{P}(Z_3=k) = \frac{N-1}{N}\times\left(\frac{1}{N}\right)^{\ell-1}\times\frac{N-2}{N}\times\left(\frac{2}{N}\right)^{k-1} = \frac{(N-1)(N-2)2^{k-1}}{N^{k+\ell}}.$$

Soit un entier $n \geqslant 2$: puisque Z_2 et Z_3 sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors

$$[Z_2+Z_3=n] = \bigcup_{k=1}^{n-1}[Z_2=k]\cap[Z_3=n-k],$$

et par union disjointe :

$$\mathbf{P}(Z_2+Z_3=n) = \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}(Z_2=k)\cap\mathbf{P}(Z_3=n-k) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(N-1)(N-2)2^{n-k-1}}{N^n}$$

$$\overset{[j=n-k-1]}{=} \frac{(N-1)(N-2)}{N^n}\sum_{j=0}^{n-2}2^j = \frac{(N-1)(N-2)}{N^n}\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}$$

$$= \frac{(N-1)(N-2)}{2}\times\frac{2^n-2}{N^n}$$

$$= \frac{(N-1)(N-2)}{2}\times\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n-\frac{2}{N^n}\right).$$

b) Puisque $T_1 = Z_1$ est la variable certaine égale à 1 :

$$\forall n \geqslant 3,\quad \mathbf{P}(T_3=n) = \mathbf{P}(1+Z_2+Z_3=n) = \mathbf{P}(Z_2+Z_3=n-1) \boxed{= \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^{n-1}-\frac{2}{N^{n-1}}\right)}.$$

Espérance et covariance

12. Soit $i \in [\![1\,;N]\!]$. D'après la relation : $T_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i}Z_j$, par linéarité de l'espérance et d'après la loi géométrique suivie par chacune des variables Z_j :

$$\mathbf{E}(T_i) = \sum_{j=1}^{i}\mathbf{E}(Z_j) = \sum_{j=1}^{i}\frac{N}{N-j+1} \overset{k=N-j+1}{=} \sum_{k=N-i+1}^{N}\frac{1}{k}.$$

13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N$:

$$\mathrm{cov}(T_i,T_j) = \mathrm{cov}(T_i, T_i+Z_{i+1}+\cdots+Z_j) = \mathrm{cov}(T_i,T_i) + \sum_{k=i+1}^{j}\mathrm{cov}(T_i,Z_k)$$

par bilinéarité de la covariance. Or $\mathrm{cov}(T_i,T_i) = \mathbf{V}(T_i)$ et pour tout $k \geqslant i+1$, Z_k est indépendante de $T_i = Z_1+\cdots+Z_i$ d'après le lemme des coalitions, puisque les $(Z_j)_{j\geqslant 1}$ sont mutuellement indépendantes.
Par conséquent : $\forall k \geqslant i+1,\ \mathrm{cov}(T_i,Z_k) = 0$ et on a bien :

$$\boxed{\mathrm{cov}(T_i,T_j) = \mathbf{V}(T_i)}.$$

★★★ FIN DU SUJET ★★★