Code sujet : 296

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : emlyon business school

MATHEMATIQUES APPLIQUÉES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Mercredi 26 avril 2023, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Études de fonctions et de suites

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

   b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. *Informatique.*

   a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
        from numpy import exp
        u=1
        n=0
        while ...... :
                u=exp(-u)/u
                n=....
        return n
```

   b) On considère maintenant la fonction Python :

```
def fonc_2(a):
        from numpy import exp
        u=1
        n=0
        while u<a :
                u=exp(-u)/u
                n=n+1
        return n
```

   Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.
   Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
   Commenter ce résultat en une ligne.

   c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$.

   a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.

   b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α.

   c) Justifier que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $e \approx 2,7$.

4. a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

   b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
   a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.
   b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
   c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question 3b.
   d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Exercice 2

Deux systèmes différentiels

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I - Réduction de la matrice A

1. a) Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?
   b) Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.
   c) Donner une base de E_2.
   d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?

2. a) Dans cette sous-question M est une matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?
   b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

3. Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Partie II - Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' &= 3x + y + z \\ y' &= x + 3y + z \\ z' &= x + y + 3z \end{cases},$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).

5. a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?
   b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III - Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.

7. La matrice B est-elle diagonalisable ?

8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.
   a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?
   c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) \begin{cases} x' & = -x - 4y \\ y' & = x + 3y \end{cases},$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Exercice 3

L'entropie en probabilité

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n :

$$[\![1, n]\!] = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Les parties II et III sont indépendantes, mais utilisent des résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaire

1. Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   a) Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   b) La fonction h est-elle dérivable en 0 ?
   c) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h.

2. Pour tout x dans $[0, 1]$ on pose $g(x) = -h(x) - h(1-x)$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ***l'entropie*** *de X est, sous réserve d'existence :*

$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe toujours et vaut :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^{n} h(p_i)$$

où, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $p_i = P(X = x_i)$.

3. Dans cette question U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer $H(U)$.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Démontrer que $H(X) \leqslant \ln 2$ avec égalité si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$. On pourra utiliser la question 2.

5. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes qui suivent des loi de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2, définies sur le même espace probabilisé.
   Soit Z la variable aléatoire telle que :
   - $Z(\Omega) = \{0, 1\}$;
   - l'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé.

   On définit le réel p par : $p = P(Z = 1)$.

   a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$?

   b) Démontrer que $p = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$.

   c) Vérifier que $1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$

6. Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et on considère la variable aléatoire Z_n telle que :
   - $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$;
   - l'événement $[Z_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « S_n est impair » est réalisé.

   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ?

   b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$ (*on pourra raisonner par récurrence*).

   c) Démontrer que $H(Z_n) \leqslant \ln 2$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Partie III - Des variables à densité

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f, on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument; ***l'entropie*** *de X est alors :*

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\,\mathrm{d}t.$$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$.
   a) Démontrer que U admet une entropie.
   b) Déterminer $H(U)$.

8. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f.
   a) Justifier de la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt$ et déterminer sa valeur.
   b) Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = 1 - \ln \lambda$.

9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note ϕ la densité usuelle de la variable aléatoire X.
   a) Donner l'espérance et la variance de X. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) \mathrm{d}t$.
   b) Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = \dfrac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$

.

FIN DE L'ÉNONCÉ

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1108 – D'après documents fournis