

Exercice 1

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Partie I : Étude de la matrice A

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Soient $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$, on a $O = aI + bA + cA^2 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \iff a = b =$

$c = 0,$

donc la famille $(I; A; A^2)$ est libre.

3. (a) A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc est diagonalisable.

(b) Recherche des valeurs propres de A.

Soient $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $V \in \mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Des

équivalences

$$\ll V \in \ker(A - \lambda I) \gg \iff \ll (A - \lambda I)V = \mathbf{0} \gg \iff \begin{cases} -\lambda x + y & = 0 \\ x - \lambda y + z & = 0 \\ y - \lambda z & = 0 \end{cases} \begin{matrix} \iff \\ L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 \end{matrix} \iff \begin{cases} (1 - \lambda^2)y + \lambda z & = 0 \\ y - \lambda z & = 0 \end{cases} \begin{matrix} \iff \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \iff \begin{cases} (2 - \lambda^2)y & = 0 \\ x - \lambda y + z & = 0 \\ y - \lambda z & = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

on déduit que $\ll \lambda$ est valeur propre de A $\gg \iff \ll A - \lambda I$ n'est pas inversible $\gg \iff \ll -\lambda = 0$ ou $2 - \lambda^2 = 0 \gg \iff \ll \lambda \in \{0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\} \gg$

Déterminons une base de $\ker(A - \lambda I)$

• $\lambda = -\sqrt{2}$; $V \in \ker(A + \sqrt{2}I) \iff \begin{cases} 0 & = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z & = 0 \\ y + \sqrt{2}z & = 0 \end{cases} \iff$

$V = \begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, (V_1) est une base de $\ker(A + \sqrt{2}I)$.

• $\lambda = 0$; $V \in \ker(A) \iff \begin{cases} 2y & = 0 \\ x + z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \iff$

$V = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Soit $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, (V_2) est une base de $\ker(A)$.

• $\lambda = \sqrt{2}$; $V \in \ker(A - \sqrt{2}I) \iff \begin{cases} 0 & = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z & = 0 \\ y - \sqrt{2}z & = 0 \end{cases} \iff$

$V = \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, (V_3) est une base de $\ker(A - \sqrt{2}I)$.

Soit $P = (V_1 \ V_2 \ V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$AP = PD \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres $V_1; V_2; V_3$ de A sont associés à des valeurs propres deux à deux distinctes donc

constituent une famille libre, donc P est inversible et donc

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Note } {}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ donc } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

4. $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$. Note $X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de A , on retrouve que $0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$ sont les valeurs propres possibles de A .

Partie II : Étude d'une application définie sur \mathcal{E}

$$1. \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \{aI + bA + cA^2 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{vect}(I; A; A^2).$$

\mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $(I; A; A^2)$ qui est une famille libre (Partie I. 2) donc une base de \mathcal{E} , d'où \mathcal{E} est de dimension 3.

2. Soit M un élément de \mathcal{E} . Il existe $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI + bA + cA^2$ donc $AM = A(aI + bA + cA^2) = aA + bA^2 + 2cA = (a + 2c)A + bA^2$ donc la matrice $AM \in \mathcal{E}$.

f est l'application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui, à toute matrice M de \mathcal{E} , associe AM .

3. On a vu que si $M \in \mathcal{E}$ alors $AM \in \mathcal{E}$, donc f est une application de \mathcal{E} vers \mathcal{E} .

Pour $(M; N, \lambda) \in \mathcal{E}^2 \times \mathbb{R}$, $f(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = f(M) + \lambda f(N)$ donc f est un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathcal{E} .

4. Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$, $M = aI + bA + cA^2$, $f(M) = (a + 2c)A + bA^2$ donc la matrice F de f dans la base $(I; A; A^2)$ de \mathcal{E} vérifie

$$F \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a+2c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ donc } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. (a) Soit $M \in \mathcal{E}$, $f \circ f \circ f(M) = A^3M = 2AM = 2f(M)$ donc $f \circ f \circ f = 2f$.

- (b) Soit M un vecteur propre de f relatif à la valeur propre λ .

On a $f \circ f \circ f(M) = 2f(M)$ et $f(M) = \lambda M$, $f \circ f \circ f(M) = f(f(\lambda M)) = f(\lambda^2 M) = \lambda^3 M$ donc $2\lambda M = \lambda^3 M$ et comme $M \neq O_3$ on déduit que

$$\text{Toute valeur propre } \lambda \text{ de } f \text{ vérifie : } \lambda^3 = 2\lambda \text{ soit } \lambda^3 - 2\lambda = 0.$$

- (c) Soit λ une valeur propre de f , on a $0 = \lambda^3 - 2\lambda = \lambda(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})$. Soit $M = aI + bA + cA^2$

- $\lambda = -\sqrt{2}$. Base de $\ker(f + \sqrt{2}Id_{\mathcal{E}})$. De $M \in \ker(f + \sqrt{2}Id_{\mathcal{E}}) \iff$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \sqrt{2}a = 0 \\ a + \sqrt{2}b + 2c = 0 \\ b + \sqrt{2}c = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} =$$

$c \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ on déduit que $(-\sqrt{2}A + A^2)$ est une base de $\ker(f + \sqrt{2}Id_{\mathcal{E}})$ qui est de dimension 1

- $\lambda = 0$. Base de $\ker(f)$.

$$M \in \ker(f) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ a + 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff M = aI \text{ donc } (I) \text{ est une}$$

base de $\ker(f)$ qui est de dimension 1

- $\lambda = \sqrt{2}$. Base de $\ker(f - \sqrt{2}Id_{\mathcal{E}})$. De $M \in \ker(f - \sqrt{2}Id_{\mathcal{E}}) \iff$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\sqrt{2}a = 0 \\ a - \sqrt{2}b + 2c = 0 \\ b - \sqrt{2}c = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} =$$

$c \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ on déduit que $(\sqrt{2}A + A^2)$ est une base de $\ker(f - \sqrt{2}Id_{\mathcal{E}})$ qui est de dimension 1

1. f n'est pas bijectif car 0 est valeur propre de f , f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3 et la somme des dimension de ses sous espaces propre vaut 3 donc f est diagonalisable.

2. $\text{Im}(f)$ a pour base $(A; A^2)$ car $A = f(I)$, $A^2 = f(A)$, et $\ker(f)$ a pour base (I) , et que $(I; A; A^2)$ est une base de \mathcal{E} . On a $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathcal{E})$: théorème du rang.
3. Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI + bA + cA^2$
- (a) $f(M) = I + A^2 \iff (a + 2c)A + bA^2 = I + A^2 \iff -I + (a + 2c)A + (b - 1)A^2 = O_3$, impossible car $(I; A; A^2)$ est une famille libre
 $f(M) = I + A^2$ d'inconnue $M \in \mathcal{E}$ n'a pas de solution.
- (b) $f(M) = A + A^2 \iff (a + 2c)A + bA^2 = A + A^2 \iff (a + 2c - 1)A + (b - 1)A^2 = O_3 \iff \ll b = 1$ et $a = 1 - 2c \gg \iff M = (1 - 2c)A + A^2$
 donc $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$ a pour ensemble de solution $\{(1 - 2c)A + A^2 \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2

$$\forall t \in]0; +\infty[, f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}, 0,69 < \ln(2) < 0,70.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Sur $]0; +\infty[$, $t \mapsto t$, $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^∞ , donc les produits $t \mapsto t^2$, $t \mapsto t \ln(t)$ sont de classe C^∞ , leur différence $t \mapsto t^2 - t \ln(t)$ est de classe C^∞ .
 On en déduit que f est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$. D'autre part $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$ (cours) donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 - t \ln(t) = 0$

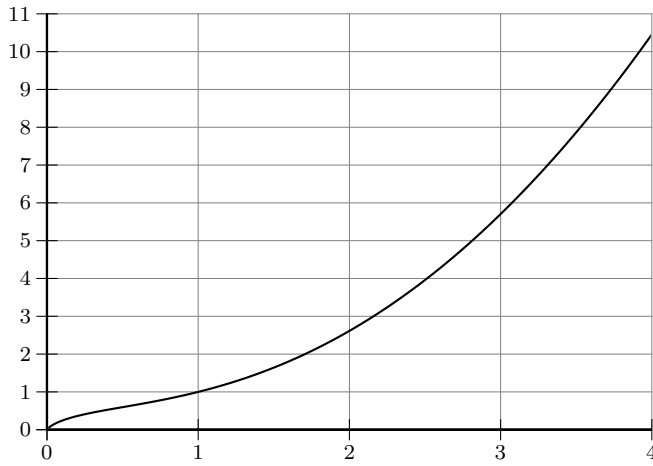
f est continue sur $[0; +\infty[$.

2. f est classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et pour tout $t \in]0; +\infty[$,
 $f(t) = t^2 - t \ln(t)$, $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1$, $f''(t) = 2 - \frac{1}{t}$.
3. Pour $t > 0$, $f(t) = t^2 - t \ln(t) = t^2 \left(1 - \frac{\ln(t)}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) > 0$;

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + 2 \ln(2)}{4}$$

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe($f''(t)$)		-	+
$f'(t)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow
signe($f'(t)$)		+	
$f(x)$	0	\nearrow	$+\infty$

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (a) Pour $t > 0$, $\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{t^2 - t \ln(t) - 0}{t} = t - \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$, donc C admet (Oy) comme demi tangente en O .
- (b) f'' s'annule en changeant de signe uniquement en $\frac{1}{2}$, donc C admet un point d'inflexion et un seul, I de coordonnées $\left(1; \frac{1 + 2 \ln(2)}{4}\right)$.
- (c) Tracer de C .



5. La fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$ donc l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in]0; +\infty[$, admet 1 pour unique solution.

Partie II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

$F :]0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , définie, pour tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$, par $F(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$

1. (a) Dérivées partielles premières de F .

$$\forall (x; y) \in]0; +\infty[^2, p = \partial_1 F(x; y) = \ln(y) - \frac{y}{x}; q = \partial_2 F(x; y) = \frac{x}{y} - \ln(x)$$

- (b) Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$.

$$\begin{aligned} \ll (x, y) \text{ est un point critique de } F \gg &\iff \ll p = q = 0 \gg \iff \begin{cases} \ln(y) - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases} \iff \\ \begin{cases} \ln(y) - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} > 0 \\ \frac{x}{y} = \ln(x) \end{cases} &\iff \begin{cases} \ln\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) - \frac{1}{\ln(x)} = 0 \\ \frac{x/y}{\ln(x)} > 0 \\ \frac{x}{\ln(x)} = y \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) - \ln(\ln(x)) - \frac{1}{\ln(x)} = 0 \\ \frac{\ln(x)}{x} > 0 \\ \frac{\ln(x)}{\ln(x)} = y \end{cases} \\ L_1 \xleftrightarrow{\ln(x)} L_1 &\begin{cases} f(\ln(x)) = 1 \\ x > 1 \\ \frac{x}{\ln(x)} = y \end{cases} \end{aligned}$$

- (c) De Partie I 5) et Partie II 1.(b) on a $\ll (x, y) \text{ est un point critique de } F \gg \iff$

$$\begin{cases} \ln(x) = 1 \\ x > 1 \\ \frac{x}{\ln(x)} = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = e \\ x > 1 \\ \frac{e}{\ln(e)} = y \end{cases} \iff (x; y) = (e; e)$$

$(e; e)$ est l'unique point critique de F .

2. Calcul des dérivées partielles seconde de F .

Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$.

$$r = \partial_1^2 F(x; y) = \frac{y}{x^2} > 0, s = \partial_2 \partial_1 F(x; y) = \partial_1 \partial_2 F(x; y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, t = \partial_2^2 F(x; y) = -\frac{x}{y^2} \text{ et pour}$$

$$(x; y) = (e; e) \text{ on a } s^2 - rt = 0^2 - \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{e}\right) > 0, \text{ donc la matrice hessienne de } F \text{ en } \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \text{ a deux valeurs}$$

propres de signes contraires c'est à dire que F n'a pas d'extremum local en $(e; e)$.

Partie III : Étude d'une suite récurrente

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. La fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, de plus $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + 2 \ln(2)}{4} \geq \frac{1 + 2 \times 0,69}{4} > \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$.

On a $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $u_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Si pour un entier n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, de la croissance de f sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a

$$\frac{1}{2} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(1) = 1 \text{ c'est à dire que } u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]}.$$

2. On a $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ donc $u_0 \leq u_1$. Si pour un entier naturel $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ de la croissance de f sur $]0; +\infty[$ et $f \geq 0$ on déduit que $0 \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ c'est à dire que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$. donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ croissante majorée par 1, donc converge vers un réel L avec $L \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. De la continuité de f en L (*) on a $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \stackrel{(*)}{=} f(L)$ or $L = f(L)$ avec $L \geq 0$ a pour unique solution $L = 1$.

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite croissante de } \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ qui converge vers } 1}.$$

4. Programme en Scilab qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

```

u=0.5, n=0
while 1-u>=1e-4
n=n+1
u=u^2-u*log(u)
end
disp('u('+string(n)+')-1='+string(u-1))
on obtient : u(19994)-1=-0.0001000

```

Exercice 3

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, $-t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{e^t}{(e^t(e^{-t}+1))^2} = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2} = f(t)$ donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire}}$.

2. $t \mapsto e^{-t}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} à valeurs strictement positive, $x \mapsto \frac{x}{(1+x)^2}$ est à valeurs strictement positive, et, elle est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$ car c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, la composée f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

donc f est positive et continue. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $u(t) = 1 + e^{-t}$ donc $u'(t) = -e^{-t}$, et $f(t) = \frac{-u'(t)}{u^2(t)}$ et soit $F(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$, F est une primitive de f et $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$ donc

$$\boxed{f \text{ est une densité d'une variable aléatoire réelle}}.$$

X est une variable aléatoire réelle de densité f .

1. La fonction de répartition de X est F définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$.

(a) La fonction $g : t \mapsto tf(t)$ est continue sur \mathbb{R} donc admet une primitive sur \mathbb{R} , impaire car f est paire et $t \mapsto t$ est impaire donc leur produit est une fonction impaire.

D'autre part si $t > 0$, $0 \leq \frac{tf(t)}{t^2} = t^3 e^{-t} \frac{1}{(1+e^{-t})^2} \leq t^3 e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc il existe $A > 0$ tel que

$$\forall t \geq A, 0 \leq \frac{tf(t)}{t^2} \leq 1, 0 \leq tf(t) \leq \frac{1}{t^2} \text{ et } \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_A^{+\infty} = \frac{1}{A} \text{ donc } \boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} tf(t)dt \text{ converge}}.$$

(b) $g : t \mapsto tf(t)$ étant impaire intégrable sur $]0; +\infty[$ elle est intégrable sur \mathbb{R} .

Pour $x > 0$ en faisant le changement de variable $v = -t$ on a $dv = -dt$,

$$\int_{-x}^x tf(t)dt = \int_x^{-x} (-v) f(-v) (-dv) = \int_x^{-x} v f(v)dv = - \int_{-x}^x tf(t)dt \text{ donc } \int_{-x}^x tf(t)dt = 0 \text{ et donc}$$

en notant G une primitive de g , on a $E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x tf(t)dt = 0$. Conclusion $\boxed{E(X) = 0}$

Partie II : Étude d'une autre variable aléatoire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \ln(1 + e^x)$$

1. φ est strictement croissante sur \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \ln(1+0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$, donc d'après le théorème de la bijection $\mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$ est bijective de bijection réciproque ψ .

$$x \mapsto \varphi(x)$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0; +\infty[$.

$$y = \varphi(x) \iff y = \ln(1 + e^x) \iff e^y = 1 + e^x \iff e^y - 1 = e^x \iff \ln(e^y - 1) = x \iff \psi(y) = x$$

$$\text{donc } \forall y \in]0; +\infty[, \varphi^{-1}(y) = \psi(y) = \ln(e^y - 1).$$

$$Y = \varphi(X)$$

1. $\varphi > 0$ donc $Y > 0$ d'où $P(Y \leq 0) = 0$.

2. Soit $t \in]0; +\infty[, F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\varphi(X) \leq t) \underset{\psi \nearrow}{=} P(X \leq \psi(t)) = P(X \leq \ln(e^t - 1)) = F(\ln(e^t - 1)) =$

$$\frac{1}{1 + e^{-\ln(e^t - 1)}} =$$

$$F_Y(t) = \frac{1}{1 + e^{-\ln(e^t - 1)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^t - 1}} = 1 - e^{-t}. \text{ Conclusion } F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

3. Y suit la loi exponentielle de paramètre 1, donc $E(Y) = \frac{1}{1} = 1$, $V(Y) = \frac{1}{1^2} = 1$.

Partie III : Étude d'une convergence en loi

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même densité f , donc de fonction de répartition F avec $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \max(X_1, \dots, X_n), U_n = T_n - \ln(n).$$

1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}, (T_n \leq t) = (\max(X_1, \dots, X_n) \leq t) = \bigcap_{k=1}^n (X_k \leq t)$ donc de l'indépendance de X_1, \dots, X_n

$$P(T_n \leq t) = P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \leq t)\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq t) = F^n(t) = \frac{1}{(1 + e^{-t})^n}, \text{ donc}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = \frac{1}{(1 + e^{-t})^n}.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$P(U_n \leq x) = P(T_n - \ln(n) \leq x) = P(T_n \leq x + \ln(n)) = \frac{1}{(1 + e^{-x + \ln(n)})^n} = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n},$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P(U_n \leq x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $P(U_n \leq x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)}$, or $\ln(1 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$, $\frac{e^{-x}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$

$$\text{donc } \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n}, -n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \frac{e^{-x}}{n} = -e^{-x} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \leq x) = e^{-e^{-x}}$$

avec $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ est de classe C^∞ positive de limite 0 en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$ donc c'est une fonction de répartition d'une variable aléatoire S de densité $x \mapsto e^{-x} e^{-e^{-x}}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers S .

FIN