

**EXERCICE 1:**

**P artie I. Loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , qu'on notera  $\mathcal{E}(\lambda)$ :**

1. Si X est une variable aléatoire de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ , une densité de X est définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition de X est alors définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} F(x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ F(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

X admet alors pour espérance  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$  et pour variance  $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

2. L'intégrale d'une densité de X étant égale à 1, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda} \text{ soit } \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

et  $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\lambda} E(X) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$  soit  $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$

3. Notons  $F_V$  et  $F_U$  les fonctions de répartitions respectives de V et U.

- (a) On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F_V(x) = P(V \leq x) = P(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leq x) = P(\ln(1 - U) \geq -\lambda \cdot x) = P((1 - U) \geq e^{-\lambda \cdot x}) = P((1 - e^{-\lambda x}) \geq U) = F_U(1 - e^{-\lambda x})$   
 Or si  $x \leq 0$ , on a  $1 - e^{-\lambda x} \leq 0$  donc  $F_V(x) = F_U(1 - e^{-\lambda x}) = 0 = F_X(x)$   
 et si  $x \geq 0$ , on a  $1 - e^{-\lambda x} \in [0; 1]$  donc  $F_V(x) = F_U(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x} = F_X(x)$ .

Par conséquent, la fonction de répartition de V est celle d'une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$

- (b) fonction V=expo(lambda)

V=-(1/lambda)\*log(1-rand()), // c'est la simulation par inversion de la fonction de répartition.  
 endfunction

**4. Partie II. Loi de la v.a.r.  $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ .**

- (a) Comme les v.a.r.  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et que  $\frac{\max(X_1, \dots, X_n) \leq x}{\text{équivalent à } (X_1 \leq x) \text{ et } (X_2 \leq x) \text{ et } \dots \text{ et } (X_n \leq x)}$   
 on a pour tout  $x > 0$  :

$$P(T_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P((X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)) = P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x) = (1 - e^{-x}) \dots (1 - e^{-x}) = (1 - e^{-x})^n = F_{T_n}(x).$$

- (b) La fonction de répartition de  $T_n$  est alors définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} F_{T_n}(x) = (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \\ F_{T_n}(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$T_n$  ayant une fonction de répartition qui est (évidemment ?) de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et aussi continue en 0 (car  $\lim_{0^+} (1 - e^{-x})^n = \lim_{0^-} 0 = 0$ ), c'est une variable continue dont une densité  $f_n$  est la dérivée de  $F_{T_n}$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

On a donc pour densité de  $T_n$  : 
$$\begin{cases} f_n(x) = F'_{T_n}(x) = n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ f_n(x) = F'_{T_n}(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**5. .**

- (a) Comme  $f_n$  est nulle sur  $\mathbb{R}^-$  et continue sur  $[0, +\infty[$ , il s'agit ici de montrer la convergence de l'intégrale :  $\int_0^{+\infty} x \cdot f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} dx$ .

Par équivalence de 2 fonctions positives en  $+\infty$  :

pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\lim_{+\infty} (1 - e^{-x})^{n-1} = 1$  donc  $x \cdot n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} \sim x \cdot n e^{-x}$ .

Par conséquent  $\int_0^{+\infty} x \cdot f_n(x) dx$  est de même nature que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx$ , donc convergente d'après la 1ère partie.

$T_n$  admet donc une espérance  $E(T_n) = \int_0^{+\infty} x \cdot f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} dx$ .

- (b) Pour  $n=1$  :  $E(T_1) = \int_0^{+\infty} x \cdot f_1(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx = 1$ . (d'après la partie I).

Et pour  $n=2$  :  $E(T_2) = \int_0^{+\infty} x \cdot f_2(x) dx = \int_0^{+\infty} 2x \cdot e^{-x} (1 - e^{-x}) dx = \int_0^{+\infty} 2x \cdot e^{-x} dx - \int_0^{+\infty} 2x \cdot e^{-2x} dx$ .

Donc toujours selon la 1ère partie  $E(T_2) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ .

6. .

(a) Pour  $x > 0$ , on a d'une part :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n - ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} = e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[(n+1)(1-e^{-x}) - n] = e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[1 - (1-e^{-x})]$$

et d'autre part :

$$f'_{n+1}(x) = [(n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n]' = (n+1)[-e^{-x}(1-e^{-x})^n + e^{-x}ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}] = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[-(1-e^{-x}) + 1]$$

On en conclut  $\boxed{-\frac{1}{n+1}f'_{n+1}(x) = e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}[1 - (n+1)e^{-x}] = f_{n+1}(x) - f_n(x)}$

(b) Les fonctions définies par  $u(x) = x$  et  $v(x) = -\frac{1}{n+1}f_{n+1}(x)$  étant de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ , l'intégration par parties sur  $[0, A]$  fournit:

$$\int_0^A x(f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = \int_0^A u(x).v'(x)dx = [x(-\frac{1}{n+1}f_{n+1}(x))]_0^A - \int_0^A 1.(-\frac{1}{n+1}f_{n+1}(x))dx = A(-\frac{1}{n+1}f_{n+1}(A)) + \frac{1}{n+1} \int_0^A f_{n+1}(x)dx$$

Comme les intégrales en question sont convergentes et que  $\lim_{A \rightarrow \infty} A(-\frac{1}{n+1}f_{n+1}(A)) = 0$  (théorème des croissances comparées), on obtient

$$\int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A x(f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \int_0^A f_{n+1}(x)dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx$$

(c) On en déduit  $\boxed{E(T_{n+1}) - E(T_n) = \int_0^{+\infty} x.f_{n+1}(x)dx - \int_0^{+\infty} x.f_n(x)dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx = \frac{1}{n+1}}$  ( $f_{n+1}$  est une densité).

Donc  $E(T_{n+1}) = E(T_n) + \frac{1}{n+1}$  et comme  $E(T_1) = 1$ , on obtient par récurrence  $\boxed{E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$ .

### P artie III : Loi du premier dépassement

7. On a  $N = 0$  lorsque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n \leq a$ .

Donc  $N = 0$  équivaut à  $X_{.1} \leq a$  et  $X_{.2} \leq a$  et ...  $X_{.n} \leq a$  et ....

Par suite :  $\boxed{(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_{.k} \leq a)}$  et les événements  $(X_{.k} \leq a)$  sont indépendants.

On a donc  $P(N = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcap_{k=1}^n (X_{.k} \leq a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n P(X_{.k} \leq a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 - e^{-a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-a})^n = 0$

et donc  $\boxed{P(N = 0) = 0}$  car  $(1 - e^{-a}) \in [0, 1[$ .

8. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  On a  $(N = n) = (X_1 \leq a) \cap \dots \cap (X_{n-1} \leq a) \cap (X_n > a)$

donc  $\boxed{p(N = n) = P(X_1 \leq a) \dots P(X_{n-1} \leq a) \cdot P(X_n > a) = (1 - e^{-a})^{n-1} (e^{-a})}$ .

9. On remarque que la v.a.r.  $N$  suit une loi géométrique de paramètre  $p = e^{-a}$ ,

donc  $\boxed{E(N) = \frac{1}{e^{-a}} = e^a}$  et  $\boxed{V(N) = \frac{1 - e^{-a}}{(e^{-a})^2} = e^{2a}(1 - e^{-a}) = e^{2a} - e^a}$

10. Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a 2 possibilités : Soit  $N(\omega) = n \in \mathbb{N}^*$  et alors  $Z(\omega) = X_n(\omega) > a$ , soit  $N(\omega) = 0$  et alors  $Z(\omega) = 0 < a$ .

Par conséquent  $\boxed{P(Z \leq a) = P(Z = 0) = P(N = 0) = 0}$ .

11. Pour  $x > a$  :

(a)  $(N = n) \cap (Z \leq x) = (N = n) \cap (X_n \leq x)$  donc :

$$\text{Si } n = 1 : (N = 1) \cap (Z \leq x) = (X_1 > a) \cap (X_1 \leq x) = \underline{(a < X_1 \leq x)}$$

et si  $n \geq 2$  :

$$(N = n) \cap (Z \leq x) = (X_1 \leq a) \cap \dots \cap (X_{n-1} \leq a) \cap (X_n > a) \cap (X_n \leq x) = \underline{(T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x)}$$

On en déduit :

$$Si n = 1 : P((N = 1) \cap (Z \leq x)) = P(a < X_1 \leq x) = F_X(x) - F_X(a) = \underline{e^{-a} - e^{-x}}$$

et si  $n \geq 2$  :

$$P((N = n) \cap (Z \leq x)) = P(T_{n-1} \leq a) \cdot P(a < X_n \leq x) = \underline{(1 - e^{-a})^{n-1} \cdot (e^{-a} - e^{-x})}$$

(en utilisant l'indépendance de  $T_{n-1}$  avec  $X_n$  et leur fonction de répartition).

(b) La formule des probabilités totales donne :

$$P(Z \leq x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((Z \leq x) \cap (N = n)) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-a})^{n-1} \cdot (e^{-a} - e^{-x})$$

donc

$$P(Z \leq x) = (e^{-a} - e^{-x}) \cdot \frac{1}{1 - (1 - e^{-a})} = (e^{-a} - e^{-x}) \cdot e^a = 1 - e^{a-x}.$$

12. .

(a) En posant  $Z' = Z - a$ , on a :

$$\text{pour tout } t < 0 : P(Z' \leq t) = P(Z - a \leq t) = P(Z \leq a + t < a) = P(Z \leq a) = 0.$$

$$\text{et pour } t \geq 0 : P(Z' \leq t) = P(Z - a \leq t) = P(Z \leq a + t) = 1 - e^{a-(a+t)} = 1 - e^{-t}.$$

Par conséquent, la variable aléatoire  $Z'$  suit la loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ .

(b) D'après les propriétés de l'espérance et de la variance d'une somme :

$$E(Z) = E(Z' + a) = E(Z') + a = 1 + a \text{ et } V(Z) = V(Z' + a) = V(Z') = 1.$$

## Exercice 2

### Partie I : étude d'une fonction $\varphi(x) = x^2 e^x - 1$ :

1.  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\varphi'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2 + x)$  :

D'où :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	-
$\varphi(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$
			-1	$\nearrow$
				$+\infty$

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$ , car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$  d'après le théorème des croissances comparées.

2. Sur  $]0, +\infty[$ ,  $e^x = \frac{1}{x^2} \iff x^2 \cdot e^x = 1 \iff \varphi(x) = 0$ .

Or sur  $]0, +\infty[$ , la continuité et la croissance stricte  $\varphi$  montrent que  $\varphi(x) = 0$  admet une unique solution que l'énoncé note  $\alpha$ .

De plus  $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \cdot e^{0.5} - 1 = \frac{\sqrt{e}}{4} - 1 < 0$  (car  $\sqrt{e} < \sqrt{3} < 2$ ) et  $\varphi(1) = e^1 - 1 > 0$ , donc  $\boxed{\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[}$ .

### Partie II : étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^3 e^x$ et $u_0 = 1$ :

3. Par une récurrence immédiate :  $u_0 = 1 \geq 1$  et si  $u_n \geq 1$  alors  $u_{n+1} = u_n^3 e^{u_n} \geq 1 \cdot e^1 \geq 1$ .

4. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = u_n^3 e^{u_n} - u_n = u_n(u_n^2 e^{u_n} - 1) = u_n \cdot \varphi(u_n) > 0$  car  $\varphi > 0$  sur  $]1, +\infty[$ .

la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc croissante.

5. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante est supérieure à 1 donc soit elle est convergente vers une limite  $l \geq 1$ , soit elle tend vers  $+\infty$ .

Si elle convergerait vers une limite  $l \geq 1$ , comme  $u_{n+1} = f(u_n)$  et que  $f$  est continue sur  $]1, +\infty[$ , on aurait  $l = f(l)$ .

Mais  $l \geq 1$  donc  $l = f(l) \iff l = l^3 e^l \iff 1 = l^2 e^l \iff \varphi(l) = 0$ , qui n'a pas de solution dans  $]1, +\infty[$ .

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  n'est donc pas convergente et on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

### Partie III : étude d'une série

6. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $0 < \frac{1}{n^3 e^n} < \frac{1}{n^3}$  et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^3}$  est convergente, donc par le théorème de majoration des séries à termes positifs, la série  $\sum \frac{1}{n^3 e^n}$  est elle aussi convergente.

7. On a

$$\left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)}$$

(c'est le reste à l'ordre n d'une série convergente).

Or pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < \frac{1}{n^3 e^n} < \frac{1}{e^n}$ , et puisqu'on a ici des séries convergentes:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 e^n} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-1/e} = \frac{1}{e^n} \cdot \frac{1}{e-1}$$

8. S=0, n=1,

while (1/((%e-1)\*exp(n))) > 0.0001,

S=S+1/(n^3\*exp(n)), n=n+1, //en sortie du while, S contient  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)}$  et n contient n+1

end

S=S+1/(n^3\*exp(n)), //Comme, on n'est pas rentré dans le while pour la 1ère valeur de  $n_0$  qui vérifie (1/(( il faut donc calculer ici  $S_{n_0} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{f(k)}$ ).

### Partie IV : étude d'une fonction de deux variables : $g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$ pour $x > 0$ .

9. U est le demi plan (ouvert) des point (x,y) de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  pour lesquels  $x > 0$ .

10. On a  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2} + e^x$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -ye^y(2+y)$ .

11. Un point M(x,y) de U est un point critique de g si, et seulement si ,

$$\begin{cases} \partial_1 g(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2} + e^x = 0 \\ \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -ye^y(2+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 + x^2 e^x = 0 \\ y = 0 \text{ ou } y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ y = 0 \text{ ou } y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$$

On obtient donc bien les deux points critiques de g :  $(\alpha, 0)$  et  $(\alpha, -2)$ .

12. f est évidemment de classe  $C^2$  sur l'ouvert U et ses dérivées secondes sont :

$$\partial_{1,1}^2 g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3} + e^x; \quad \partial_{1,2}^2 g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

$$\text{et } \partial_{2,2}^2 g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -e^y(2 + 4y + y^2)$$

D'où la matrice Hessienne de g en  $(\alpha, 0)$  :  $\Delta^2 g(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Cette matrice ayant 2 valeurs propres de signes opposés, g n'a pas d'extremum local en  $(\alpha, 0)$ .

13. Toujours avec les mêmes dérivées partielles secondes, on obtient la matrice Hessienne de g en  $(\alpha, -2)$  :

$$\Delta^2 g(\alpha, -2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice ayant 2 valeurs propres strictement positives, g admet un minimum local en  $(\alpha, -2)$ .

14. Le calcul de  $g(\alpha, -2) = \frac{1}{\alpha} + e^\alpha - 4e^{-2}$  n'est pas très utile ici.

En effet, si on fixe la valeur de x (à  $x_0 = \alpha$ , par exemple), on a :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} g(\alpha, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} + e^\alpha - y^2 e^y = -\infty$$

Ce qui montre que g n'a pas de minimum global en  $(\alpha, -2)$ .

### EXERCICE 3:

#### 1. étude du noyau de $f$ :

- (a)  $f^2 + i \neq \theta$  donc il existe un vecteur  $x_0$  de  $E$  tel que  $(f^2 + i)(x_0) \neq 0$ , mais comme  $f \circ (f^2 + i) = 0$ , on a aussi,  $f \circ (f^2 + i)(x_0) = 0$ .

Le vecteur  $(f^2 + i)(x_0)$  est donc un vecteur non nul du noyau de  $f$ ,  $f$  n'est donc pas injectif, et a fortiori pas bijectif non plus.

- (b) On a répondu partiellement dans de (a) : il suffit de prendre  $u = (f^2 + i)(x_0)$  où  $x_0$  est un vecteur vérifiant  $(f^2 + i)(x_0) \neq 0$ .

Ce vecteur  $u$  est alors un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre 0.

Par conséquent,  $u$  est alors un vecteur propre de associé à la valeur propre 0

#### 2. $f \circ (f^2 + i) = 0$ donc $X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de $f$ .

Comme 0 est l'unique racine réelle de  $X(X^2 + 1)$  c'est aussi l'unique valeur propre possible de  $f$ .

On a donc montré  $Sp(f) \subset \{0\}$ . Or d'après le 1.(b), on a  $0 \in Sp(f)$  donc  $Sp(f) = \{0\}$ .

#### 3. De façon classique : Si $f$ était diagonalisable, comme il admet 0 pour unique valeur propre, il existerait une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ formée de vecteurs propres de $f$ , et donc tous associés à 0.

On aurait alors pour tout vecteur  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  de  $E$ ,  $f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + x_3f(e_3) = 0$ .

Ce qui contredirait l'hypothèse  $f \neq \theta$ , c'est donc que  $f$  n'est pas diagonalisable.

#### 4. Sachant que $f \neq \theta$ , il existe un vecteur non nul $x_1$ de $E$ tel que $f(x_1) \neq 0$ .

Mais comme les endomorphismes  $f$  et  $f^2 + i$  commutent, on a  $(f^2 + i) \circ f = f \circ (f^2 + i) = 0$  et donc  $(f^2 + i)(f(x_1)) = 0$ .

On a  $f(x_1) \neq 0$  et  $(f^2 + i)(f(x_1)) = 0$ . donc  $f^2 + i$  n'est pas bijectif.

En posant  $v = f(x_1)$  défini plus haut : on a bien  $v \neq 0$  et  $(f^2 + i)(v) = 0$  donc  $f^2(v) = -i(v) = -v$ .

#### 5. $v_2$ et $v_3$ étant ainsi définis, on a $f(v_3) = f(f(v_2)) = f^2(v_2) = -v_2$ .

#### 6. $B = (v_1, v_2, v_3)$ .

- (a) Si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont trois réels tels que  $\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3 = 0$  alors en composant par  $f$  et en utilisant sa linéarité, on obtient  $\lambda_1f(v_1) + \lambda_2f(v_2) + \lambda_3f(v_3) = 0$

Comme  $f(v_1) = 0$ ,  $f(v_2) = v_3$  et  $f(v_3) = -v_2$ , on obtient (1) :  $\lambda_2v_3 - \lambda_3v_2 = 0$ .

Et toujours en composant par  $f$  :  $\lambda_2f(v_3) - \lambda_3f(v_2) = 0$  soit donc (2) :  $-\lambda_2v_2 - \lambda_3v_3 = 0$ .

Par combinaison linéaire (pour éliminer les  $v_3$ ) :

$\lambda_3(1) + \lambda_2(2)$  donne  $\lambda_3(\lambda_2v_3 - \lambda_3v_2) + \lambda_2(-\lambda_2v_2 - \lambda_3v_3) = -(\lambda_3^2 + \lambda_2^2)v_2 = 0$ .

Et puisque  $v_2 \neq 0$ , on obtient  $\lambda_3^2 + \lambda_2^2 = 0$ , ce qui n'est possible que si  $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$ .

Ce qui nous amène  $\lambda_1v_1 = 0$  et donc aussi  $\lambda_1 = 0$ .

Ouf, on a montré que la famille  $B = (v_1, v_2, v_3)$  est libre dans  $E$ .

De plus, son cardinal étant égal à la dimension de  $E$ , c'est une base de  $E$ .

- (b) Comme  $f(v_1) = 0$ ,  $f(v_2) = v_3$  et  $f(v_3) = -v_2$ , la matrice de  $f$  dans la base  $B = (v_1, v_2, v_3)$  est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 7. Si $a, b$ et $c$ sont trois réels tels que $aA + bB + cC = 0$ , on obtient :

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } \underline{a = b = c = 0}.$$

La famille  $(A, B, C)$  est donc libre et (par définition) génératrice de  $F$ , ça en fait donc une base de  $F$ , qui est par conséquent un espace vectoriel de dimension 3.

8. Si  $M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & a & b \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$  alors  $CM = MC$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -w & -a & -b \\ t & u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ 0 & v & -u \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}$$

Qui se traduit par  $z = y = w = t = 0; a = -v$ ; et  $b = u$  et par conséquent par  $M = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & b & -a \\ 0 & a & b \end{pmatrix} =$

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = xA + bB + aC.$$

on vient de montrer que  $CM = MC \iff M \in F$  . et donc  $\underline{\{M \in M_3(\mathbb{R}); CM = MC\} = F}$

9. résolution d'une équation dans F :

(a) comme  $aA + bB + cC = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$  on a

$$(aA + bB + cC)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2 - c^2 \end{pmatrix} = a^2A + (b^2 - c^2)B + 2bcC$$

(b) En choisissant M sous la forme  $M = aA + bB + cC = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$

d'après les calculs du (a) , on a  $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} \iff a = 4; b^2 - c^2 = 5 \text{ et } 2bc = 12$

et on obtient une solution en la matrice  $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  , obtenue avec  $a = 2; b = 3 \text{ et } c = 2$ .

10. Dans la base B , on a

$$\text{mat}(g) = \text{mat}(f^2 - i) = \text{mat}(f^2) - \text{mat}(i) = C^2 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = G$$

C'est une matrice inversible , donc g est bijectif et sa matrice dans B est

$$\text{mat}(g)^{-1} = G^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = -I - \frac{1}{2}C^2 = \text{mat}(-i - \frac{1}{2}f^2).$$

Par conséquent  $g^{-1} = -i - \frac{1}{2}f^2$ .