

EXERCICE 1

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I : Étude de la matrice B

1. N.B. à voir la question suivante B va être diagonalisable !

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(B - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (2 - \alpha)x + 2y = 0 \\ x + (3 - \alpha)y = 0 \end{cases}$$

$$\iff (1) \begin{cases} [-(3 - \alpha)(2 - \alpha) + 2]y = 0 \\ x = -(3 - \alpha)y = 0 \end{cases}$$

$[-(3 - \alpha)(2 - \alpha) + 2] = -\alpha^2 + 5\alpha - 4$ (et on voit le polynôme annulateur juste en dessous !)

qui a pour racines : $\alpha = 1$ et $\alpha = 4$ donc

— si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 4$ alors (1) $\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ donc n'est pas valeur propre.

— Si $\alpha = 1$ alors (1) $\iff x = -2y$ et 1 est valeur propre associée au sous espace propre Vect $((-2, 1))$

— Si $\alpha = 4$ alors (1) $\iff x = y$ et 4 est valeur propre associée au sous espace propre Vect $((1, 1))$

Conclusion : Les valeurs propres de B sont donc 1 et 4.

Comme B est une matrice d'ordre 2 avec 2 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

2. Comme $(-2, 1)$ est vecteur propre associé à 1, alors $\frac{-1}{2}(-2, 1) = (1, -1/2)$ également. (première ligne de P)

et (condition suffisante) La juxtaposition $((1, -1/2), (1, 1))$ est donc une base de vecteurs propres.

Donc avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ inversible on a $B = PDP^{-1}$

3. Comme D est diagonale, on a $D^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}$ et $5D - 4I = \begin{pmatrix} 5 - 4 & 0 \\ 0 & 20 - 4 \end{pmatrix} = D^2$

On a alors $B^2 = PD^2P^{-1} = 5PDP^{-1} - 4PIP^{-1} = 5B - 4I$ combinaison linéaire de B et de I .

4. $B^2 = 5B - 4I$ donc $I = -\frac{1}{4}(B^2 - 5B) = -\frac{1}{4}(B - 5I)B$

Conclusion : B est inversible et $B^{-1} = -\frac{1}{4}(B - 5I)$

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad M \mapsto h(M) = AMB.$

1. h est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (produit de matrice 2x2)

Pour tout M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α et β réels.

$$\begin{aligned} h(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N)B \\ &= \alpha AMB + \beta ANB \\ &= \alpha h(M) + \beta h(N) \end{aligned}$$

Conclusion : h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Les angles d'attaque ici sont multiples pour la bijection ($\ker(h)$, matrice associée, 0 valeur propre...).
 Mais pour obtenir h^{-1} , le choix se restreint à :
 Pour tout M et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} h(M) = N &\iff AMB = N \\ &\iff M = A^{-1}NB^{-1} \end{aligned}$$

car A est inversible (triangulaire sans terme nul sur la diagonale)

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } h \text{ est bijective et pour tout } N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ h^{-1}(N) = A^{-1}NB^{-1}}$

3. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h .

a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $N = MP$, ou P est la matrice définie dans la question **I2**.

on a donc $M = NP^{-1}$

$$\begin{aligned} h(M) = \lambda M &\iff AMB = \lambda M \\ &\iff ANP^{-1}B = \lambda NP^{-1} \\ &\iff ANP^{-1}BP = \lambda N \\ &\iff AND = \lambda N \end{aligned}$$

où D est la matrice définie dans la question **I2**.

b) Soit $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$AND = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -z & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 4y \\ -z & -4t \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \lambda N = \lambda \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } AND = \lambda N \iff \begin{cases} x = \lambda x \\ 4y = \lambda y \\ -z = \lambda z \\ -4t = \lambda t \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - \lambda)x = 0 \\ (4 - \lambda)y = 0 \\ (-1 - \lambda)z = 0 \\ (-4 - \lambda)t = 0 \end{cases}$$

Donc il existe une matrice N non nulle si et seulement si $\lambda = 1, -1, 4$ ou -4

- c) Donc, avec $M = NP$, $h(M) = \lambda M \iff AND = \lambda N$ aura des solutions non nulle sous les mêmes conditions.

Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } h \text{ sont } 1, -1, 4 \text{ et } -4}$

et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4, l'endomorphisme h qui possède 4 valeurs propres distinctes et donc diagonalisable.

Dans une base de matrices propres (associées dans cet ordre), sa matrice sera $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} =$

Δ

- d) On note e l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note 0 l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans la base de matrices propres précédentes, la matrice de $(h - e) \circ (h + e) \circ (h - 4e) \circ (h + 4e)$ est :

$$\begin{aligned} &(\Delta - I)(\Delta + I)(\Delta - 4I)(\Delta + I) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(h - e) \circ (h + e) \circ (h - 4e) \circ (h + 4e) = 0.}$

EXERCICE 2

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in]0; +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. f est continue sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions continues.

En, $0 : f(t) = t \ln(t) \rightarrow 0 = f(0)$ (usuelle).

Attention ! par croissance comparée il faut un quotient : $f(t) = \frac{\ln(t)}{1/t} \rightarrow 0$ car $\ln(t) = o(1/t)$

Conclusion : f est continue sur $]0; +\infty[$.

2. f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions C^1

Conclusion : et pour tout $t \in]0; +\infty[: f'(t) = \ln(t) + 1$

3. En $+\infty : t \ln(t) \rightarrow +\infty$

Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.

Pour le signe de $\ln(t) + 1$ on peut résoudre $\ln(t) + 1 > 0$ (« et de même pour < 0 et $= 0$) ou plus rapidement :

t	0	e^{-1}	$+\infty$
$\ln(t) + 1$	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$
$f'(t)$? -	0	+
$f(t)$	0 \searrow	$-e^{-1}$	$\nearrow +\infty$

4. f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et $f''(t) = 1/t > 0$

Conclusion : f est convexe sur $]0; +\infty[$.

5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j})

a) On calcule le taux d'accroissement, à droite seulement d'où la « demi » tangente :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \ln(t) \rightarrow -\infty$$

Donc Γ admet une demi-tangente verticale en O .

- b) On a un premier point d'intersection en O

et pour $t \neq 0 : f(t) = 0 \iff t \ln(t) = 0 \iff \ln(t) = 0 \iff t = 1$

Conclusion : les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses, sont $(0, 0)$ et $(1, 0)$

- c) En $+\infty : f(t)/t = \ln(t) \rightarrow +\infty$

Il y a donc une branche parabolique verticale

- d) Pour tracer l'allure de Γ , il reste à déterminer la pente en $(e, e) : f'(1) = 1$

Il faut donc place $(0, 0)$ avec tangente verticale, $(e^{-1}, -e^{-1})$ avec tangente horizontale, $(0, 1)$ avec pente de 1 et enfin la branche parabolique.

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , définie, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ par :

$$F(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

1. F est de classe C^2 comme quotient de fonctions C^2 (contenu du \ln strictement positif et dénominateur non nul) sur $]0; +\infty[^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{xy} - \frac{\ln(y)}{x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\ln(x)}{y^2} + \frac{1}{xy}\end{aligned}$$

2. On ne demande pas tous les points critique (résolution) mais de montrer que (e, e) en est un : vérification.

En (e, e) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(e, e) &= \frac{1}{e^2} - \frac{\ln(e)}{e^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(e, e) &= -\frac{\ln(e)}{e^2} + \frac{1}{e^2} = 0\end{aligned}$$

Conclusion : Donc (e, e) est un point critique de F

3. On a :

$$\begin{aligned}r &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-1}{x^2 y} + 2\frac{\ln(y)}{x^3} \\ s &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{xy^2} - \frac{1}{yx^2} \\ t &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 2\frac{\ln(x)}{y^3} - \frac{1}{xy^2}\end{aligned}$$

et en (e, e) :

$$r = 1/e^3 : s = -2/e^3 \text{ et } t = 1/e^3$$

$$\text{Donc } rt - s^2 = -2/e^6 < 0$$

Conclusion : sur l'ouvert $]0; +\infty[^2$ F n'a donc pas d'extremum local en (e, e)

EXERCICE 3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. L'intégrale d'une fonction continue (puissance positive) n'est impropre qu'en $+\infty$.

On compare à une référence : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$:

$$\frac{x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{1/x^2} = x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + (n+2)\ln(x)\right) \text{ avec}$$

$$() = -x^2 \left(\frac{1}{2a^2} - (n+2) \frac{\ln(x)}{x^2} \right) \rightarrow -\infty \text{ car } \ln(x) = o(x^2)$$

donc $\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + (n+2)\ln(x)\right) \rightarrow 0$ et

Conclusion : $x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = o(1/x^2)$

Et comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (Riemann) alors, par majoration de fonction positive, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ également.

2. a) La loi normale d'espérance nulle et de variance a^2 a pour densité : $\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-(x/a)^2/2}$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-(x/a)^2/2} dx &= 1 \text{ et par parité} \\ \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(x/a)^2/2} dx &= \frac{1}{2} \text{ donc} \\ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx &= \frac{a\sqrt{2\pi}}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : $I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

b) $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. φ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \frac{-2x}{2a^2} \\ &= -e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \frac{x}{a^2}\end{aligned}$$

On a alors, en passant par l'intégrale partielle, quand $M \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}\int_0^M x e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx &= [-a^2 \varphi(x)]_0^M \\ &= -a^2 e^{-\frac{M^2}{2a^2}} + a^2 \\ &\rightarrow a^2\end{aligned}$$

Conclusion : $I_1 = a^2$

3. a) Pour tout entier n , tel que $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0; +\infty[$ par intégration par parties avec $u(x) = x^{n-1}$: $u'(x) = (n-1)x^{n-2}$: $v'(x) = x e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$: $v(x) = -a^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ et u et $v \in C^1$ sur $[0, t]$ car la puissance est positive !

$$\begin{aligned}\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx &= \left[-a^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} x^{n-1} \right]_0^t - \int_0^t -a^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} (n-1) x^{n-2} dx \\ &= -a^2 t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1) a^2 \int_0^t x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx\end{aligned}$$

b) et quand $t \rightarrow +\infty$ on a $t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \rightarrow 0$ comme précédemment donc

Conclusion : pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $I_n = (n-1) a^2 I_{n-2}$.

c) On a donc ($n = 2 \geq 2$) donc

$$\begin{aligned}I_2 &= 1a^2 I_0 = a^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ I_1 &= 2a^2 I_1 = 2a^4\end{aligned}$$

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. g_a est continue par morceaux sur \mathbb{R} et positive.

$$\int_{-\infty}^0 g_a(x) dx = 0 \text{ et}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \frac{1}{a^2} I_1 = a^2$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t) dt$ converge et vaut 1

Conclusion : g_a est une densité de probabilité

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

5. Soit G la fonction de répartition de X . On a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $G(t) = \int_{-\infty}^t g_a(x) dx$

$$\text{— si } t \leq 0 : G(t) = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0$$

$$\text{— si } t \geq 0 : G(t) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \right]_0^t = 1 - e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$$

6. On a

$$\int_0^{+\infty} x \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \frac{1}{a^2} I_2 = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et comme $\int_{-\infty}^0 x g_a(x) dx$ converge et est nulle alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x g_a(x) dx$ converge et vaut $a \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Conclusion : X admet une espérance et $E(X) = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

7. On cherche l'espérance de X^2 :

$$\int_0^{+\infty} x^2 \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \frac{1}{a^2} I_3 = 2a^2$$

Donc X^2 a une espérance et $E(X^2) = 2a^2$

Conclusion : X a une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 = \frac{4-\pi}{2}a^2$

8. a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle, $]0; 1]$.

Soit f la densité d'une loi $\mathcal{U}_{]0;1]}$: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et F sa fonction de répartition.

Soit enfin H la fonction de répartition de $Z = a\sqrt{-2 \ln(U)}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H(x) &= P\left(a\sqrt{-2 \ln(U)} \leq x\right) \\ &= P\left(\sqrt{-2 \ln(U)} \leq \frac{x}{a}\right) \text{ car } a > 0 \\ &= P\left(-2 \ln(U) \leq \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \\ &= P\left(\ln(U) \geq -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \\ &= P\left(U \geq \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\right) \\ &= 1 - F\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\right) \end{aligned}$$

Comme U est à densité, F est continue sur \mathbb{R} et C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

Donc H est continue sur \mathbb{R} et C^1 là où $\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \neq 0$ et $\neq 1$ i.e. en $x \neq 0$

Donc Z est à densité et une densité de Z est :

$$h(x) = -F'\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \frac{-x}{a^2}$$

et comme $\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \in]0; 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors

$$h(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \frac{x}{a^2} = g_a(x)$$

Conclusion : $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X

b) La loi uniforme $\mathcal{U}_{[0;1]}$ est simulée par $U:=\text{random}$; et $Z:=a*\text{sqrt}(-2*\ln(U))$ simulera donc la loi de X

```

program simula;
var a,U,Z:real;
begin
  writeln('a,');readln(a);randomize;
  U:=random;
  Z:=a*sqrt(-2*ln(U));
  writeln(Z);
end.

```

Soit un entier n tel que $n \geq 2$.

On dit que les variables aléatoires à densité X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes si, pour tout, n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) de réels, les événements $(X_1 \leq x_1), (X_2 \leq x_2), \dots, (X_n \leq x_n)$ sont mutuellement indépendants.

On admet que si n variables aléatoires à densité X_1, X_2, \dots, X_n admettent une espérance, alors la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ admet une espérance qui est égale à la somme des espérances.

On admet que si n variables aléatoires à densité X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes et admettent variance alors la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance qui est égale à la somme des variances.

On considère n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, \dots, X_n suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X .

9. On considère la variable aléatoire $A_n = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.

a) On a $A_n = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n X_k$ donc A a une espérance et

$$\begin{aligned}
 E(A_n) &= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n E(X_k) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n a\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} a\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^n 1 \\
 &= a
 \end{aligned}$$

Donc le biais de A_n comme estimateur de a est : $a - a = 0$

Conclusion : A_n est un estimateur sans biais de a .

b) Comme les (X_k) sont indépendantes alors

$$\begin{aligned}
 V(A_n) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\right)^2 \sum_{k=1}^n V(X_k) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{4-\pi}{2} a^2 \\
 &= \frac{2}{n^2\pi} \frac{4-\pi}{2} a^2 \sum_{k=1}^n 1 \\
 &= \frac{4-\pi}{n\pi} a^2
 \end{aligned}$$

Donc le risque quadratique est $r = V(A_n) + \text{biais}^2$

Conclusion : le risque quadratique de l'estimateur A_n est $\frac{4 - \pi}{n\pi} a^2$

On définit la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}, (M_n > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap \dots \cap (X_n > t)$.

10. a) pour tout $t \in]0, +\infty[$ par indépendance :

$$\begin{aligned} P(M_n > t) &= P(X_1 > t) P(X_2 > t) \dots P(X_n > t) \\ &= (1 - G(t))^n \\ &= \left(e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \right)^n \\ &= e^{-\frac{nt^2}{2a^2}} \end{aligned}$$

b) On a donc, pour tout $t \geq 0$:

$$P(M_n \leq t) = 1 - e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$$

et comme $P(M_n \leq 0) = 0$ et que la fonction de répartition est croissante sur \mathbb{R} alors

Conclusion : sa fonction de répartition est : $P(M_n \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{nt^2}{2a^2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

c) La fonction de répartition est croissante sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$

En 0^- : $P(M_n \leq t) = 0 \rightarrow 0 = P(M_n \leq 0)$ donc sa fonction de répartition est continue sur \mathbb{R} et C^1 sur \mathbb{R}^*

Donc M_n est à densité et une densité de M_n est (dérivée de la précédente) :

$$\begin{cases} \frac{nt}{a^2} e^{-\frac{nt^2}{2a^2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} = g_b(t) \text{ avec } b = \frac{a}{\sqrt{n}}.$$

d) On a vu que, pour tout réel $a > 0$, X de densité g_a a pour espérance $a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Donc M_n a une espérance et espérance

$$\begin{aligned} E(M_n) &= b\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \\ V(M_n) &= \frac{4 - \pi}{2} b^2 = \frac{a^2}{n} \frac{4 - \pi}{2} \end{aligned}$$

11. a) Donc avec $B_n = M_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ on a $E(B_n) = E(M_n) \sqrt{\frac{2n}{\pi}} = a$

Conclusion : $B_n = M_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ est un estimateur sans biais de a

b) On a

$$\begin{aligned} V(B_n) &= \sqrt{\frac{2n}{\pi}}^2 V(M_n) \\ &= \frac{2n}{\pi} \frac{a^2}{n} \frac{4 - \pi}{2} \\ &= a^2 \frac{4 - \pi}{\pi} \end{aligned}$$

Donc le risque quadratique de B_n comme estimateur de a est : $a^2 \frac{4 - \pi}{\pi}$

risque quadratique qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$: A_n est grandement préférable !