

Exercice 1

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. Pour tout x de $]0; +\infty[$, $x > 0$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + (x + \ln(x)) e^{x-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right) e^{x-1} \end{aligned}$$

2. Soit $g(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ (car $x > 0$ et $x \neq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$)

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

donc

x	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		\searrow	1	\nearrow

 et donc $g(x) \geq 1 > 0$ Ainsi : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln x + \frac{1}{x} > 0$

3. on a donc pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) + 1 + x > 0$$

car $1 + x \geq 0$

Conclusion : $x \in]0, +\infty[\quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$

4. On a donc $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi : f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

5. En 0 : $f(x) = (x + \ln x) e^{x-1} \rightarrow -\infty$

En $+\infty$: $f(x) = (x + \ln x) e^{x-1} \rightarrow +\infty$

x	0	1	$+\infty$		
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	1	\nearrow	$+\infty$

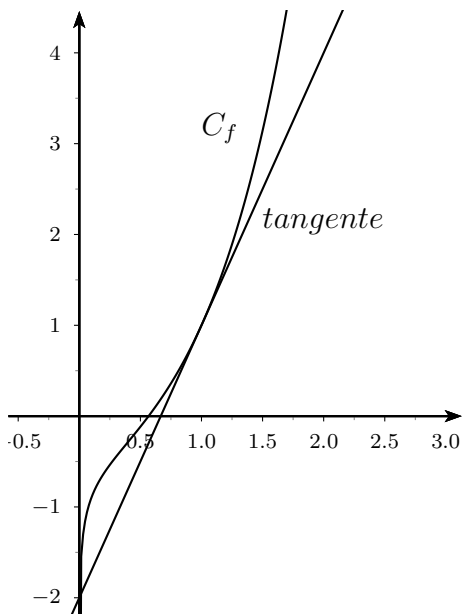
On a $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$ pente de la tangente en 1.

6. En 0 : $f(x) \rightarrow -\infty$ et on a donc une asymptote verticale

$$\text{En } +\infty : \frac{f(x)}{x} = \frac{(x + \ln x) e^{x-1}}{x} = \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) \cdot e^{x-1} \rightarrow +\infty$$

car $\ln(x) = o(x)$ et on a donc une branche parabolique verticale en $+\infty$ i.e. une branche parabolique de direction Oy

7. L'équation de la tangente en 1 est : $y = 1 + 3(x - 1)$



Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f .

1. Par récurrence :

- $u_0 = 2$ existe et $u_0 \geq 2$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel u_n existe et $u_n \geq 2$

Alors $u_n > 0$ et $f(u_n)$ est donc calculable (définie) donc u_{n+1} existe.

Et comme f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que u_n et $2 \in]0; +\infty[$:

$$f(u_n) \geq f(2) = (2 + \ln(2)) \cdot e \geq 2 \text{ car } \ln(2) \geq 0$$

- Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq 2$

2. • Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$ donc $u_0 \geq e^0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_n \geq e^n$ alors le moyen naturel est :

$$u_{n+1} = f(u_n) = (u_n + \ln(u_n)) e^{u_n - 1} \text{ avec}$$

$$\ln(u_n) \geq \ln(2) \text{ donc } u_n + \ln(u_n) \geq u_n \geq e^n$$

$$\text{et } u_n - 1 \geq 1 \text{ donc } e^{u_n - 1} \geq e^1$$

$$\text{d'où } f(u_n) \geq e^n e = e^{n+1}$$

- Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e^n \text{ et par minoration } u_n \rightarrow +\infty,$

3. On calcule u_n et n tant que $u_n < 10^{20}$ ou jusqu'à ce que $u_n \geq 10^{20}$

program premier ;

var n : integer; u : real;

begin

 u := 2; n := 0;

 while u < 1E20 do

 begin u := (u + ln(u)) * exp(u - 1); n := n + 1 end;

 writeln(n);

end.

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

1. f est continue sur $]0; +\infty[$ donc F est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Mais alors F' est donc de classe C^1 et donc F est de classe C^2

2. On a, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$

$$G'_x(x, y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = F'(x) - 2\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} = f(x) - e^{\frac{x+y}{2}}$$

$$G'_y(x, y) = f(y) - e^{\frac{x+y}{2}}$$

3. a) f continue et strictement croissante est donc bijective de $]0; +\infty[$ dans $\left] \lim_0 f; \lim_{+\infty} f \right[= \mathbb{R}$

b) Pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, (x, y) est un point critique de G si et seulement si

$$\begin{cases} G'_x(x, y) = 0 \\ G'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \\ f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{cases} \text{ et comme } f \text{ est}$$

bijjective sur $]0; +\infty[$ et que x et y en sont éléments,

$$\iff \begin{cases} x = y \\ f(x) - e^x = 0 \end{cases}$$

on résout alors cette seconde équation

$$f(x) - e^x = 0 \iff (x + \ln(x))e^{x-1} - e^x = 0$$

$$\iff (x + \ln(x))e^{-1} - 1 = 0$$

$$\iff x + \ln(x) = e$$

Ainsi : $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ est un point critique de G si et seulement si $x = y$ et $x + \ln x = e$.

4. On peut appliquer le théorème de la bijection monotone sur $]0; +\infty[$ puis vérifier que $1 < \alpha < e$ en comparant les images :

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc bijective de $]0; +\infty[$ dans $] -\infty; +\infty[$. Comme $e \in] -\infty; +\infty[$ alors l'équation $f(x) = e$, admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ par le Th de la bijection monotone.

De plus $f(1) = 1 < e$ et $f(e) = (e + 1) \cdot e^{e-1} > e$ donc comme f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, alors $1 < \alpha < e$.

Ainsi : $x + \ln(x) = e$ a une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et $1 < \alpha < e$

5. G a donc un unique point critique (α, α) sur l'ouvert $]0; +\infty[$

Reste à calculer $s^2 - rt$

On a, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = f'(x) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x, y) = f'(y) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}$$

et en (α, α) :

$$r = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\alpha, \alpha) = f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha$$

$$s = -\frac{1}{2}e^\alpha$$

$$t = f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha$$

On simplifie l'expression de $f'(\alpha)$ en tenant compte du fait que $\alpha + \ln(\alpha) = e$:

$$f'(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \alpha + \ln(\alpha)\right) e^{\alpha-1} = \left(1 + \frac{1}{\alpha} + e\right) e^{\alpha-1} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{\alpha-1} + e^\alpha > e^\alpha$$

Ainsi : $f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha > \frac{1}{2}e^\alpha$ donc $r > \frac{1}{2}e^\alpha, t > \frac{1}{2}e^\alpha$ donc $rt > \frac{1}{4}e^{2\alpha}$ et ainsi $s^2 - rt < 0$.

Conclusion : G a un extremum local unique en (α, α) sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ et comme $r > 0$, c'est un minimum

Exercice 2

Partie 1 : Détermination d'une racine carrée de A

1. A est symétrique donc diagonalisable et comme elle a deux colonnes identiques, elle est non inversible.

Le rang de A est la dimension de l'image de l'application f associée dans la base canonique de \mathbb{R}^3

Son image est engendrée par $((1, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 3))$ donc par $((1, 1, 1), (1, 1, 3))$.

Cette famille étant libre (2 vecteurs non proportionnels), elle est une base de l'image et donc $\dim \text{Im}(f) = 2$

Donc le rang de A est égal à 2.

2. Comme A ne peut pas avoir plus de trois valeurs propres distinctes, il suffit de les tester pour être sûr de les avoir toutes :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A - 0I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 & L_2 - L_1 \\ x + y + 3z = 0 & L_3 - L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \text{ (en paramétrant par } x \text{ pour avoir la première ligne de } P \text{ égale à 1)}$$

Donc 0 est valeur propre de A et le sous espace propre associé est $E_0 = \text{Vect}((1, -1, 0))$

$$(A - 1I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc 1 est valeur propre de A et le sous espace propre associé est $E_1 = \text{Vect}((1, 1, -1))$

$$(A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -3x + y + z = 0 & L_1 + L_3 \\ x - 3y + z = 0 & L_2 + L_3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ z = 2x \end{cases} \text{ donc 4 est valeur propre de } A \text{ et le sous espace propre associé est } \text{Vect}((1, 1, 2))$$

3. A ayant trois valeurs propres distinctes, la juxtaposition de vecteurs propres associés à 0, 1 et 4 : $((1, -1, 0), (1, 1, -1), (1, 1, 2))$ est une base de vecteurs propres.

Donc avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant et

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrice de passage donc inversible on a $A = PDP^{-1}$.

4. Par la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2/2 \rightarrow L_1 \\ L_2/2 \rightarrow L_2 \\ L_3 + L_2/2 \rightarrow L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 - L_3/3 \rightarrow L_2 \\ L_3/3 \rightarrow L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

et donc

Conclusion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$

5. $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est unique avec les deux contraintes des coefs diagonaux croissants et carré égal à D .

6. On note $R = P\Delta P^{-1}$. On a alors $R = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$

$$P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} = R$$

Et on prend le temps de vérifier que $R^2 = A \dots$

Partie II : Étude d'endomorphismes

1. On a $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\cdot) = P$

Donc, d'après la formule de changement de base :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P^{-1}AP = D$$

$$\text{et de même } \text{mat}_{\mathcal{C}}(g) = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \text{mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P^{-1}RP = \Delta$$

2. a) $\ker(f)$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 0

Donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, -1, 0))$ et comme $((1, -1, 0))$ est libre (un vecteur non nul) elle forme une base de $\ker(f)$ et $\dim \ker(f) = 1$

b) Le théorème du rang donne alors $\dim \text{Im}(f) = 3 - 1 = 2$

Et comme $f(e_1) = (1, 1, 1)$ première colonne de A et $f(e_3) = (1, 1, 3)$ forment une famille libre (2 vecteurs non proportionnels) de $\text{Im}(f)$, ils forment une base de $\text{Im}(f)$

3. En inversant l'ordre des questions a) et b) :

$(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$ est génératrice de $\text{Im}(g)$ et comme $g(e_1) = (2/3, 2/3, 1/3) = g(e_2)$ alors $(g(e_1), g(e_3))$ est génératrice de $\text{Im}(g)$, et de plus libre.

Conclusion : $(g(e_1), g(e_3))$ est donc une base de $\text{Im}(g)$ et $\dim(\text{Im}(g)) = 2$

Par le théorème du rang, $\dim(\ker(g)) = 1$ et on constate que $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } g((1, -1, 0)) = 0$$

Donc $((1, -1, 0))$ est une famille libre de 1 vecteur de $\ker(g)$

Conclusion : $((1, -1, 0))$ est une base de $\ker(g)$ et $\dim \ker(g) = 1$

4. La relation $g = f \circ h$. est équivalente à l'égalité de leurs matrices dans \mathcal{C} : $\text{mat}_{\mathcal{C}} g = \text{mat}_{\mathcal{C}} f \circ h = \text{mat}_{\mathcal{C}} f \text{ mat}_{\mathcal{C}} h$.

On cherche donc une matrice H , inversible pour que h soit un automorphisme, telle que $\Delta = DH$

Pour rester dans l'esprit du sujet, on cherche H diagonale :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ qui est inversible convient.}$$

Et l'application linéaire h associée à H dans \mathcal{C} est un automorphisme de \mathbb{R}^3 vérifiant $g = f \circ h$. Sa matrice dans \mathcal{B} (puisqu'elle est demandée) est alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(h) = PHP^{-1}$ d'après la formule de changement de base.

Exercice 3

Partie I Différence de deux variables aléatoires.

1. X (qui ne s'intéresse qu'au premier essai) est le nombre de joueurs, parmi n , atteignant la cible au premier essai, indépendamment les uns des autres et avec une même probabilité p .

Conclusion : $\text{Donc } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } E(X) = np, V(X) = npq.$

2. Pour chaque joueur, la probabilité de ne pas atteindre la cible (E_i pour échec au $i^{\text{ème}}$ essai) est $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = q^2$ par indépendance.

Donc la probabilité de l'atteindre au moins une fois est $P(\overline{E_1 \cap E_2}) = 1 - q^2$ et comme précédemment,

Conclusion : $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - q^2), E(Z) = n(1 - q^2) \text{ et } V(Z) = nq^2(1 - q^2)$

3. Y est donc le nombre de joueur atteignant la cible la seconde fois.

Pour chaque joueur, la probabilité en est $P(E_1 \cap \overline{E_2}) = P(E_1)P(\overline{E_2}) = pq$ par indépendance.

Conclusion : $\text{Donc } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq).$

4. a) X et Y ne sont pas indépendantes :

$(X = n \cap Y = n)$ est impossible donc $P(X = n \cap Y = n) = 0 \neq P(X = n)P(Y = n)$

b) Calculer la covariance du couple (X, Y) . ??? par quel bout prendre la question ?

Si on part de la définition $\text{cov}(X, Y) = E(X)E(Y) - E(XY)$ demande d'aller chercher la loi du couple pour obtenir $E(X, Y)$: laborieux.

On cherche donc la covariance là où elle intervient : $V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$ donc

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \frac{1}{2}(V(Z) - V(Y) - V(X)) \\ &= \frac{1}{2}(nq^2(1 - q^2) - npq(1 - pq) - npq) \\ &= \frac{1}{2}nq(q(1 - q)(1 + q) - p(1 - pq) - p) \\ &= \frac{1}{2}nqp(q(1 + q) - 1 + pq - 1) \text{ tout en } q \\ &= \frac{1}{2}nqp(q + q^2 - 2 + (1 - q)q) \\ &= -np^2q \end{aligned}$$

N.B. la covariance négative est cohérente : plus X est grand, plus Y risque d'être petit.

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

1. **N.B.** Pour donner la loi, ne pas oublier de donner les valeurs possibles.

On a $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(U = n) = q^{n-1}p$, $E(U) = \frac{1}{p}$ et $V(U) = \frac{q}{p^2}$

2. a) $(U = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned} P(T > t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(U=n)}(T > t) P(U = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} q^{n-1} p \text{ pour } t \in [0; +\infty[\\ &= \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t}q)^n \\ &= \frac{p}{q} e^{-t} q \frac{1}{1 - e^{-t}q} \text{ car } |e^{-t}q| < 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall t \in [0; +\infty[, P(T > t) = \frac{p e^{-t}}{1 - q e^{-t}}$

b) La fonction de répartition de T est donc donnée par :

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - \frac{p e^{-t}}{1 - q e^{-t}} \text{ pour tout } t \geq 0$$

et comme F (fonction de répartition) est croissante et positive et que $F(0) = 1 - \frac{p}{1 - q} =$

0 alors $F(t) = 0$ pour tout $t < 0$

c) F est donc continue

- sur $[0; +\infty[$ car $1 - q e^{-t} \neq 0$
- sur $] -\infty, 0[$ fonction nulle
- en 0^- car $F(t) = 0 \rightarrow 0 = F(0)$

Donc la fonction de répartition de T est continue sur \mathbb{R} et C^1 sur \mathbb{R}^* donc T est à densité.

Une densité est F' là où F est C^1

Pour $t > 0$: $F(t) = 1 - \frac{p e^{-t}}{1 - q e^{-t}}$ et

$$\begin{aligned} F'(t) &= -p \frac{-e^{-t}(1 - qe^{-t}) - qe^{-t}e^{-t}}{(1 - qe^{-t})^2} \\ &= \frac{pe^{-t}}{(1 - qe^{-t})^2} \end{aligned}$$

Conclusion : T est à densité et une densité est

$$f(t) = \begin{cases} \frac{pe^{-t}}{(1 - qe^{-t})^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

3. On note $Z = UT$

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in [0; +\infty[$,

$$P_{(U=n)}(Z > z) = P_{(U=n)}(UT > z) = P_{(U=n)}(T > z/n) = e^{-nz/n} = e^{-z}$$

b) On passe par les probabilités totales : $P(Z > z) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U = n) P_{(U=n)}(Z > z) = e^{-z} \sum_{n=1}^{+\infty} P(U = n)$

e^{-z} car $(U = n)_{n \in \mathbb{N}}$ SCE La fonction de répartition de Z est donc

$$G(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \text{ où l'on reconnaît que } \boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in [0; +\infty[$, $P(U = n, Z > z) = P(U = n) P_{U=n}(Z > z) = P(U = n) e^{-z} = P(U = n) P(Z > z)$

Bilan : FIN