

Exercice 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. a) On a $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Comme $K^2 = -I$ on a $K(-K) = I$ et $(-K)K = I$ donc K est inversible et En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1} .

c) Si α est une valeur propre de K et que U est une colonne propre (non nulle donc) associée alors

$$KU = \alpha U \text{ et } K^2U = K(KU) = \alpha KU = \alpha^2 U$$

Et comme $K^2 = -I$ on a alors : $K^2U = -U$ donc $(\alpha^2 + 1)U = 0$ et comme $U \neq 0$ alors $\alpha^2 + 1 = 0$ ce qui est impossible dans les réels.

Donc K n'a pas de valeurs propres.

2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.

a) Comme $KI = IK = K$ on peut utiliser le binôme et $M^2 = (aI)^2 + 2aIbK + (bK)^2 = a^2I + 2abK - b^2$

$$\text{D'autre part } -(a^2 + b^2)I + 2aM = -a^2I - b^2I + 2a(aI + bK) = a^2I + 2abK - b^2$$

$$\text{On a donc bien : } M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM.$$

b) Donc si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors $a^2 + b^2 > 0$ et on peut alors factoriser la matrice I :

$$(a^2 + b^2)I = 2aM - M^2 \text{ et } I = \frac{1}{(a^2 + b^2)}(2aI - M) \cdot M = M \frac{1}{(a^2 + b^2)}(2aI - M)$$

$$\text{Donc } M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{(a^2 + b^2)}(2aI - M)$$

c) On reconnaît la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}I + K$$

Donc avec $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$ (qui ne sont pas tous deux nuls) c'est une matrice inversible dont l'inverse est :

$$\begin{aligned}
M^{-1} &= \frac{1}{(\sqrt{2}^2 + 1^2)} (2\sqrt{2}I - M) = \frac{1}{3} (\sqrt{2}I - K) \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 + \sqrt{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 , et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 associé à la matrice K relativement à la base \mathcal{B} . On considère les quatre éléments suivants de \mathbb{R}^4 :

$$v_1 = e_1 \quad v_2 = f(e_1) \quad v_3 = e_3 \quad v_4 = f(e_3)$$

a) On calcule les coordonnées des images via les coordonnées et la matrice de f dans la base canonique.

$$v_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1)) = K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } v_2 = (1, 1, 0, 1)$$

$$v_3 = (0, 0, 1, 0)$$

$$\text{et } \text{mat}_{\mathcal{B}}(f(e_3)) = K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } v_4 = (-1, 1, 0, 0) \text{ et}$$

On a donc

La famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est donc échelonnée (à une permutation près) donc elle est libre .

Comme elle comporte 4 vecteurs de \mathbb{R}^4 qui est de dimension 4, c'est une base de \mathbb{R}^4 .

b) Par définition on a $f(v_1) = v_2$, qui a pour coordonnées dans \mathcal{C} : $(0, 1, 0, 0)$

On obtient $f(v_2)$ par sa matrice dans \mathcal{B}

$$\begin{aligned}
\text{mat}_{\mathcal{B}}(f(v_2)) &= K \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}}(v_2) = K^2 \text{mat}_{\mathcal{B}}(e_1) \\
&= \text{mat}_{\mathcal{B}}(e_1)
\end{aligned}$$

donc $f(v_2) = -v_1$ qui a pour coordonnées dans \mathcal{C} : $(-1, 0, 0, 0)$

$f(v_3) = v_4$ par définition qui a pour coordonnées dans \mathcal{C} : $(0, 0, 0, 1)$ et

$$\begin{aligned}
\text{mat}_{\mathcal{B}}(f(v_4)) &= K^2 \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}}(e_3) \\
&= -\text{mat}_{\mathcal{B}}(e_3)
\end{aligned}$$

donc $f(v_4) = -v_3$ qui a pour coordonnées dans \mathcal{C} : $(0, 0, -1, 0)$

$$\text{Donc la matrice de } f \text{ dans } \mathcal{C} \text{ est } K' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) La matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} est celle des coordonnées des vecteurs de \mathcal{C} dans la base \mathcal{B} soit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) On rappelle que $K' = \text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P^{-1} \cdot K \cdot P$

Exercice 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Pour $k \geq 1$ on a pour tout $x \in \mathbb{R} : \frac{dx^k}{dx} = kx^{k-1}$ donc

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \quad \text{réindexé } h = k-1 \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{h+1} x^h = - \sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^h \\ &= - \frac{(-x)^{2n} - 1}{-x - 1} = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1} \quad \text{car } -x \neq 1 \end{aligned}$$

2. P_n' est du signe de $x^{2n} - 1$ et comme $2n > 0$ la fonction $x \rightarrow x^{2n} - 1$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ (et strictement décroissante sur \mathbb{R}^- puisque $2n$ est pair) donc

x	0	1	$+\infty$
$x^{2n} - 1$	- ↗	0	↗ +
$P_n'(x)$	-	0	+
$P_n(x)$	0 ↘	$P_n(1)$	↗ $+\infty$

en $+\infty$ on a : $P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n} = x^{2n} \left(-x^{2n-1} + \frac{x^{2-2n}}{2} + \dots + \frac{-x^{-1}}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) \rightarrow +\infty$

3. Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ alors $P_n(1) < P_n(0) = 0$

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[:$

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right) \end{aligned}$$

b) On a donc en particulier pour $x = 2 :$

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} \right)$$

Et comme $-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0$ la suite $(P_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors croissante.

Comme de plus $P_1(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0$ alors pour tout entier $n \geq 1 : P_n(2) \geq P_1(2) \geq 0$

5. On utilise alors le théorème de bijection:

P_n est continue et strictement croissante sur $]1, 2]$ donc bijective de $]1, 2]$ dans $] \lim_1 f, f(2)] =]f(1), f(2)]$

Or $f(1) < 0 \leq f(2)$ donc $0 \in]f(1), f(2)]$

Et l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution $x_n \in]1, 2]$

Et comme P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, elle n'a pas d'autres solutions sur cet intervalle.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, admet une solution et une seule notée x_n sur $[1, +\infty[$, et $1 < x_n \leq 2$

6. On programme la méthode de dichotomie pour programmer le calcul de x_2 à 10^{-3} près : On utilise pour raccourcir les calculs que $P_2(x) = -x = x^2/2 - x^3/3 + x^4/4 = x[-1 + x(1/2 + x[-1/3 + x/4])]$

program approche;

var a,b,c:real;

function p(x:real):real;

begin

 p:=x*(-1+x(1/2+x(-1/3+x/4)));

end;

begin

 a:=0;b:=1;

 repeat

 c:=(a+b)/2

 if p(c)>0 then b:=c else a:=c;

 until b-a<=1E-3;

 writeln(b);

end.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. On a vu précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$: $P_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$. P_n est donc la primitive dont on a besoin pour l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt &= [P_n(t)]_0^x = P_n(x) - P_n(0) \\ &= P_n(x) \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P_n(x_n) = 0$ donc $\int_0^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = 0$ et par Chasles $\int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = 0$
d'où

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = - \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt \quad ((1))$$

3. On étudie les variations de la différence : Soit $f(x) = t^{2n} - 1 - n(t^2 - 1)$. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt(t^{2n-2} - 1)$.

et pour $n \geq 1$ on aura $2n - 2 \geq 0$ donc si $t \geq 1$ alors $t^{2n-2} \geq 1^{2n-2}$ d'où $f'(t) \geq 0$

Donc pour $n \geq 1$, f est croissante sur $[1, +\infty[$.

De plus $f(1) = 0$ donc pour tout $t \in [1, +\infty[$: $f(t) \geq 0$ et

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$$

4. On a alors tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \geq 1$

$$\frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq \frac{n(t^2 - 1)}{t + 1}$$

comme $1 \leq x_n$ (bornes de l'intégrale croissantes)

$$\begin{aligned} \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt &\geq \int_1^{x_n} \frac{n(t^2 - 1)}{t + 1} dt = \int_1^{x_n} n(t - 1) dt = n \left[\frac{(t - 1)^2}{2} \right]_1^{x_n} \\ &\geq \frac{n(x_n - 1)^2}{2} \end{aligned}$$

que l'on réintroduit dans l'équation du (1) pour obtenir :

$$\frac{n(x_n - 1)^2}{2} \leq \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$$

intégrale que l'on majore à nouveau par $1 - t^{2n} \leq 1$ d'où (bornes croissantes)

$$\int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t + 1} dt = [\ln(t + 1)]_0^1 = \ln(2)$$

d'où finalement :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{n(x_n - 1)^2}{2} \leq \ln(2) \quad \text{d'où} \\ 0 &< (x_n - 1)^2 \leq \frac{2 \ln 2}{n} \quad \text{et} \\ 0 &< x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}} \quad \text{car } x_n - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

5. Et par encadrement $x_n - 1 \rightarrow 0$ et donc $x_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$

Exercice 3

1. Étude préliminaire

a) Comme on sait que la série converge, on travaille directement la somme pour tout réel x de $[0, 1[$:

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

$$s_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1 - x)^2}$$

- b) Pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tels que $k < n$, on a $k + 1 \leq n$ donc les coefficients s'écrivent sous forme factorielle :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

- c) On démontre pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0, 1[$, déduire de la question précédente :

$$xs_k(x) + xs_{k+1}(x) = x \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n.$$

On calcule les sommes partielles :

$$\begin{aligned} x \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^M \binom{n}{k+1} x^n &= \sum_{n=k+1}^M \binom{n}{k} x^{n+1} + \sum_{n=k+1}^M \binom{n}{k+1} x^{n+1} \\ &\quad + \binom{k}{k} x^{k+1} \text{ en isolant les } \binom{n}{k} \\ &= \sum_{n=k+1}^M \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) x^{n+1} + x^{k+1} \\ &= \sum_{n=k+1}^M \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} + x^{k+1} \\ &= \sum_{m=k+2}^{M+1} \binom{m}{k+1} x^m + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} \\ &= \sum_{m=k+1}^{M+1} \binom{m}{k+1} x^m \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^n = s_{k+1}(x) \end{aligned}$$

et donc $s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x)$

- d) Soit $x \in [0, 1[$. On fait apparaître la relation de récurrence qui permettra de déterminer s_{k+1} à partir de s_k :

$$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x) \text{ donc } s_{k+1}(x)(1-x) = xs_k(x) \text{ et } s_{k+1}(x) = s_k(x) \frac{x}{1-x}$$

- pour $k = 0$ on a $s_0(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{x^0}{(1-x)0+1}$

- Soit $k \geq 0$ tel que $s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ alors

$$\begin{aligned} s_{k+1}(x) &= s_k(x) \frac{x}{1-x} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \cdot \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+1+1}} \end{aligned}$$

- Donc pour tout entier $k : s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

2. Étude d'une expérience aléatoire

- a) Si on continue le tirage des boules après la noirs, le rang de la première reste le même. Donc la loi de N est celle de la **première** boule noire obtenue dans une suite de tirages **indépendants** ayant tous la **même probabilité** $1/5$ de donner une boule noire.

$$\text{Donc } N \hookrightarrow \mathcal{G}(1/5) \text{ et } E(N) = \frac{1}{1/5} = 5$$

- b) Quand $N = n$, on effectue n tirages indépendants dans l'urne. Donc le nombre X de boules noires obtenues suit une loi binômiale de paramètres n et $1/5$. Donc pour $k \in [[0, n]] : p(X = k/N = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$. et 0 si $k > n$

- c) Comme la probabilité **dépend de** la valeur de n , on utilise la formule des probabilités totales en conditionnant avec comme système complet d'événements $(N = n)_{n \in [[1, +\infty[[$

La série est convergente et

$$P(X = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{P_{N=n}(X = 0)}_{\text{avec } 0 \leq n} P(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5}$$

on regroupe les puissances pour n'avoir qu'une puissance n et on factorise les constantes :

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{1}{5} \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \frac{1}{4} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n} - \left(\frac{4}{5}\right)^0 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{16}{25}} - 1 \right) = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

car $|16/25| < 1$

- d) $(N = n)_{n \in [[1, +\infty[[$ est là encore un système complet d'événements. Mais dans la formule des probabilités totales, seules les termes pour lesquels $n \geq k$ seront non nuls

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{N=n}(X = k) P(N = n)$$

On calcule la somme partielle (le découpage de la somme peut se faire si $k \geq 1$) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M P_{N=n}(X = k) P(N = n) &= \sum_{n=1}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{1}{5} \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^{-k-1} \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} \left(\frac{16}{25}\right)^n \\ &\xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(1 - \left(\frac{16}{25}\right)\right)^{k+1}} = \frac{1}{4^k} \frac{16^k}{9^k} \frac{25}{9} \frac{1}{4} \\ P(X = k) &= \left(\frac{4}{9}\right)^k \frac{25}{36} \end{aligned}$$

e) On étudie l'absolue convergence de la série $\sum_{k \geq 0} k \cdot P(X = k)$ et comme $|k \cdot P(X = k)| = k \cdot P(X = k)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^M k \cdot P(X = k) &= \sum_{k=1}^M k \cdot P(X = k) + 0 \\ &= \sum_{k=1}^M k \left(\frac{4}{9}\right)^k \frac{25}{36} = \frac{25}{36} \left(\sum_{k=0}^M k \left(\frac{4}{9}\right)^k - 0 \right) \\ &\rightarrow \frac{25}{36} \frac{\frac{4}{9}}{\left(1 - \frac{4}{9}\right)^2} = 1 \text{ car } |4/9| < 1 \end{aligned}$$

donc la série est absolument convergente, X a une espérance et $E(X) = 1$.

f) On a pour $k \geq 1$ (pour pouvoir mettre à part le terme pour $k = 0$)

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= \sum_{i=0}^k p(X = i) = \frac{4}{9} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{4}{9}\right)^i \frac{25}{36} = \frac{4}{9} + \frac{25}{36} \left(\sum_{i=0}^k \left(\frac{4}{9}\right)^i - 1 \right) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{25}{36} \left(\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - 1}{\frac{4}{9} - 1} - 1 \right) = \frac{4}{9} + \frac{25}{36} \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - 1 + \frac{5}{9}}{-\frac{5}{9}} \\ &= \frac{4}{9} - \frac{5}{4} \left(\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - \frac{4}{9} \right) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k \end{aligned}$$

et également pour $k = 0$ où $p(X \leq 0) = p(X = 0) = 4/9$

3. Étude d'une variable à densité

On note $a = -\frac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x = e^{x \ln \frac{4}{9}}$.

a) F est la fonction de répartition d'une variable à densité si :

- $F \rightarrow 0$ en $-\infty$ et $F \rightarrow 1$ en $+\infty$
- F est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points
- F est croissante sur \mathbb{R}

ce que l'on vérifie :

- Pour $x < a$ on a $F(x) = 0 \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$
et pour $x > a$ on a $F(x) = 1 - e^{x \ln \frac{4}{9}} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ car $\ln(4/9) < 0$ (car $4/9 < 1$)
- F est continue sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, a[$ comme composée de fonctions continues.
Il reste à montrer la continuité en a^- en revenant à la définition :

En a^- on a $F(x) = 0 \rightarrow 0$ et

$$\begin{aligned}
 F(a) &= 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^a = 1 - \frac{5}{9} e^{a \ln \frac{4}{9}} \quad \text{avec} \\
 a \ln \frac{4}{9} &= -\frac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4} \ln \frac{4}{9} = -\frac{\ln(9/5)}{\ln(9/4)} [-\ln(9/4)] \\
 &= \ln\left(\frac{9}{5}\right) \quad \text{donc} \\
 F(a) &= 1 - \frac{5}{9} \frac{9}{5} = 0
 \end{aligned}$$

Donc $F(x) \rightarrow F(a)$ quand $x \rightarrow a$ avec $x < a$

Donc F est continue à droite de a donc continue sur \mathbb{R}

Enfin elle est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, a[$ comme composée de fonctions C^1 .

- D'autre part $F'(x) = 0$ sur $]-\infty, a[$ et $F'(x) = -\frac{5}{9} e^{x \ln(4/9)} \ln\left(\frac{4}{9}\right) > 0$ sur $]a, +\infty[$ car $\ln(4/9) < 0$
donc F est croissante sur \mathbb{R}

Donc F est bien une fonction de répartition de variable à densité

- b) Une densité de Y est alors f : définie par $f(x) = 0$ si $x < a$ et $f(x) = \frac{5}{9} \ln\left(\frac{9}{4}\right) e^{x \ln(4/9)}$ sur $[a, +\infty[$ (la valeur en a est arbitraire comme en un nombre fini de points)
- c) Pour obtenir une primitive, on peut primitiver par parties (hors programme) ou procéder par étapes :

- Soit $G(x) = x e^{x \ln \frac{4}{9}}$ alors G est dérivable sur \mathbb{R} et $G'(x) = e^{x \ln \frac{4}{9}} + x e^{x \ln \frac{4}{9}} \ln \frac{4}{9}$
- On compense le $\ln \frac{4}{9}$ pour obtenir le $x e^{x \ln \frac{4}{9}}$ après dérivation :
Soit $G(x) = x e^{x \ln \frac{4}{9}} / \ln \frac{4}{9}$ alors G est dérivable sur \mathbb{R} et

$$G'(x) = \left(e^{x \ln \frac{4}{9}} + x e^{x \ln \frac{4}{9}} \ln \frac{4}{9} \right) / \ln \frac{4}{9} = x e^{x \ln \frac{4}{9}} + e^{x \ln \frac{4}{9}} / \ln \frac{4}{9}$$
- et on fait disparaître ce dernier terme en le compensant au départ :
Soit $G(x) = x e^{x \ln \frac{4}{9}} / \ln \frac{4}{9} - e^{x \ln \frac{4}{9}} / (\ln \frac{4}{9})^2$ alors G est dérivable sur \mathbb{R} et

$$G'(x) = \left(e^{x \ln \frac{4}{9}} + x e^{x \ln \frac{4}{9}} \ln \frac{4}{9} \right) / \ln \frac{4}{9} - e^{x \ln \frac{4}{9}} / \ln \frac{4}{9} = x e^{x \ln \frac{4}{9}}$$

Donc cette dernière fonction G est une primitive de g sur \mathbb{R}

Déterminer une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x e^{x \ln \frac{4}{9}}$.

- d) Y admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ converge.

Comme f est continue par morceaux sur \mathbb{R} (f prolongeable en a^+ et en a^-) cette intégrale est impropre en $\pm\infty$

- convergence en $-\infty$: $\int_{-\infty}^a t f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt$ converge et est nulle.

- convergence en $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\int_a^M tf(t) dt &= \int_a^M t \frac{5}{9} \ln\left(\frac{9}{4}\right) e^{t \ln(4/9)} dt = \frac{5}{9} \ln\left(\frac{9}{4}\right) \int_a^M g(t) dt \\
&= \frac{5}{9} \ln\left(\frac{9}{4}\right) [G]_a^M \\
&= \frac{5}{9} \ln\left(\frac{9}{4}\right) \left[\begin{aligned} &Me^{M \ln \frac{4}{9}} / \ln \frac{4}{9} - e^{M \ln \frac{4}{9}} / \left(\ln \frac{4}{9}\right)^2 \\ &- ae^{a \ln \frac{4}{9}} / \ln \frac{4}{9} + e^{a \ln \frac{4}{9}} / \left(\ln \frac{4}{9}\right)^2 \end{aligned} \right] \\
&\xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{5}{9} \ln\left(\frac{9}{4}\right) \left[-ae^{a \ln \frac{4}{9}} / \ln \frac{4}{9} + e^{a \ln \frac{4}{9}} / \left(\ln \frac{4}{9}\right)^2 \right]
\end{aligned}$$

avec $a \ln \frac{4}{9} = \ln\left(\frac{9}{5}\right)$ et $e^{a \ln \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge et Y a une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{5}{9} \left[-a \frac{9}{5} \left(\ln \frac{4}{9}\right) + \frac{9}{5} \right] / \left(\ln \frac{4}{9}\right) \\
&= \frac{1 - \ln(9/5)}{\ln(4/9)}
\end{aligned}$$