EMLYON Graduate School of Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. a. Calculer K^2.

b. En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1}.

c. Montrer que la matrice K n'admet aucune valeur propre réelle.

2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.

a. Montrer : $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.

b. En déduire que, si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M.

c. *Application :* donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice K relativement à la base $\mathcal{B}$. On considère les quatre éléments suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

a. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4 et en déduire la matrice K' associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$.

c. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

d. Rappeler l'expression de K' en fonction de K, P et P^{-1}.

EXERCICE 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. *Étude des fonctions polynomiales P_n*

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}, \text{ où } P_n' \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

4. a. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right).$$

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geqslant 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leqslant 2.$$

6. Écrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1\,;+\infty[$:

$$t^{2n}-1 \geqslant n(t^2-1).$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 3

1. Étude préliminaire

On admet, pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0\,;1[$, que la série $\sum_{n\geqslant k} C_n^k x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$.

a. Vérifier, pour tout réel x de $[0\,;1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

b. Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tel que $k<n$, montrer :

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

c. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0\,;1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

d. Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0\,;1[,\ \ s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. *Étude d'une expérience aléatoire*

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(X = k \,/\, N = n)$.

c. Vérifier : $\qquad \mathrm{P}(X = 0) = \dfrac{4}{9}\cdot$

d. En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

e. Montrer que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et calculer $\mathrm{E}(X)$.

f. Montrer : $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X \leqslant k) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k.$

3. *Étude d'une variable aléatoire à densité*

On note $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a\,;\,+\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle : $\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln \frac{4}{9}}.$

a. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée Y.

b. Déterminer une densité f de Y.

c. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x \ln \frac{4}{9}}$.

d. Montrer que Y admet une espérance $\mathrm{E}(Y)$ et calculer $\mathrm{E}(Y)$.

- FIN -