MATHÉMATIQUES EDHEC E 2020

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On note ${}^{t}B$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **antisymétrique** lorsqu'elle vérifie ${}^{t}M = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
   - $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un ensemble vide : la matrice carrée nulle d'ordre n, est égale à sa transposée et à son opposée : ${}^{t}0_n = 0_n = -0_n$, donc $0_n \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   - Soient M et N deux matrices antisymétriques éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda,\ \mu$ deux réels quelconques :

$$\begin{aligned} {}^{t}(\lambda.M+\mu.N) &= \lambda.{}^{t}M + \mu.{}^{t}N && \text{linéarité de la transposée} \\ &= -\lambda.M - \mu.N && \text{puisque } M \text{ et } N \text{ appartiennent à } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ {}^{t}(\lambda.M+\mu.N) &= -(\lambda.M+\mu.N) && \text{donc } \lambda.M+\mu.N \text{ appartient encore à } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

   On a bien montré que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f qui a toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = ({}^{t}A)M + MA$$

2. a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: calculons la transposée de $f(M)$.

$$\begin{aligned} {}^{t}\big(f(M)\big) &= {}^{t}\big(({}^{t}A)M + MA\big) = {}^{t}\big(({}^{t}AM)\big) + {}^{t}(MA) && \text{par linéarité de la transposée} \\ &= {}^{t}M\,{}^{t}({}^{t}A) + {}^{t}A\,{}^{t}M && \text{transposée d'un produit : attention à l'ordre des facteurs !} \\ &= -MA - {}^{t}AM = -({}^{t}AM + MA) = -f(M) && \text{puisque } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ et } {}^{t}({}^{t}A) = A \end{aligned}$$

   On a donc bien prouvé que pour toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $f(M)$ appartient encore à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

   b) Montrons que f est une application linéaire ; pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour tous réels λ et μ :

$$f(\lambda.M+\mu.N) = {}^{t}A(\lambda.M+\mu.N)+(\lambda.M+\mu.N)A = \lambda.({}^{t}AM+MA)+\mu.({}^{t}AN+NA) = \lambda.f(M)+\mu.f(N)$$

   Ainsi f est bien linéaire, et au vu du résultat de la question précédente, c'est bien un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n=3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

   a) Il faut ici revenir à la forme générale connue des matrices antisymétriques d'ordre 3 : $M=\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}$, et en cas de besoin on la retrouve selon le principe d'identification des coefficients :

   Pour une matrice $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, ${}^{t}M=\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}$ et :

$$ {}^{t}M=-M \iff \begin{cases} a=-a \Longrightarrow a=0\\ b=-d\\ c=-g\\ e=-e\Longrightarrow e=0\\ f=-h\\ i=-i\Longrightarrow i=0\end{cases}$$

   On peut donc écrire toute matrice M de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sous la forme :

$$M=a.\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=a.J+b.K+c.L$$

   où a,b,c sont trois réels quelconque, donc $\mathcal{B}=(J,K,L)$ est bien une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

   b) Pour vérifier que $\mathcal{B}$ est libre, on considère trois réels a,b,c tels que :

$$a.J+b.K+c.L=0_3 \iff \begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix} \iff a=b=c=0$$

   La famille $\mathcal{B}$ est donc bien libre, et comme elle engendre $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, c'est une base de cet espace et $\dim \mathcal{A}_3(\mathbb{R})=3$.

4. a) Par définition les trois images demandées s'obtiennent par calcul matriciel, avec ${}^{t}A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$:

$$f(J)={}^{t}AJ+JA=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$f(K)={}^{t}AK+KA=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$f(L)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

   On remarque donc que :

$$f(J)=-J-L=-1.J+0.K-1.L,\quad f(K)=0.J+0.K+0.L,\quad f(L)=-L=0.J+0.K-1.L$$

b) Par propriété du cours, puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(J), f(K), f(L)\big) = \mathrm{Vect}(-J-L, 0_3, -L) = \mathrm{Vect}(J+L, L) = \mathrm{Vect}(J, L)$$

On a utilisé ici le fait que la matrice nulle peut toujours être éliminée d'une famille génératrice, et qu'en multipliant les éléments de la famille par (-1), puis en soustrayant un des vecteurs à un autre, la famille ainsi transformée est encore génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

c) On vient de voir que (J, L) est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$: c'est aussi une famille libre puisque c'est une sous-famille de la base $\mathcal{B}$, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Le théorème du rang donne alors :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Im}(f) = 3 - 2 = 1$$

Il suffit donc, pour trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$, de trouver un vecteur non nulle qui lui appartienne. Or on vient de voir que $f(K) = 0_3$, avec $K \neq 0_3$, donc (K) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

5. a) Les calculs faits en 4.a) permettent de donner directement la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(J) & f(K) & f(L) \end{array} \\ F = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} J \\ K \\ L \end{array} \end{array}$$

b) La matrice F est triangulaire (inférieure) : ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, et ce sont aussi celles de f, donc :

$$\mathrm{Sp}(F) = \mathrm{Sp}(f) = \{-1; 0\}$$

c) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$: l'endomorphisme $f + Id$ est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $F + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et le rang de $f + Id$ est celui de la matrice $F + I_3$: ce rang est égal à 2, c'est la dimension de l'espace engendré par les trois colonnes de $F + I_3$: la troisième est nulle, et les deux premières sont non colinéaires.

Le théorème du rang donne cette fois : $\dim \mathrm{Ker}(f+Id) = \dim \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) - \mathrm{rg}(f+Id) = 3-2 = 1$.

Or $\mathrm{Ker}(f + Id)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont les deux sous-espaces propres de f, respectivement associés aux valeurs propres -1 et 0. Comme la somme de leurs dimensions vaut $1 + 1 = 2 \neq 3$, on en conclut que f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

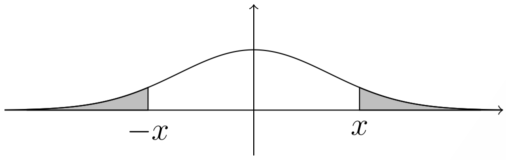
On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où σ est strictement positif.

1. Il est très important de savoir retrouver et justifier très simplement cette propriété fondamentale vérifiée par tout loi normale centrée, et plus généralement d'ailleurs par toute variable aléatoire admettant une densité paire sur $\mathbb{R}$!

La fonction $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est effectivement paire sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(-x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = f_X(x)$$

On peut donc, pour tout réel x, déclarer l'égalité d'intégrales associée au schéma ci-dessous :



Soit : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t \iff \mathbb{P}(X \leqslant -x) = \mathbb{P}(X \geqslant x) \iff F_X(-x) = 1 - F_X(x)$

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

   a) Il est clair qu'au vu de sa définition, Y est une variable aléatoire positive, ce qui permet déjà d'affirmer sans calcul que $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < 0$.

   Pour tout réel x positif :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(|X| \leqslant x) = \mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) = F_X(x) - F_X(-x) = F_X(x) - \big(1 - F_X(x)\big) = 2F_X(x) - 1$$

   b) Au vu de sa définition, la fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue sur $]-\infty; 0[$ comme fonction constante, et sur $]0; +\infty[$ puisque F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

   De plus, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$, tandis que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F_Y(x) = \lim_{x \to 0^+} 2F_X(x) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$ (en effet toujours par parité de f_X, $F_X(0) = \mathbb{P}(X \leqslant 0) = \mathbb{P}(X \geqslant 0) = \dfrac{1}{2}$).

   La fonction F_Y est donc continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 : Y est bien une variable à densité, et on obtient une densité f_Y de Y en dérivant F_Y là où c'est possible (partout sauf en 0), tandis qu'en 0 on choisit une valeur arbitraire positive (on prend ici $f_Y(0) = 0$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2F_X'(x) = 2f_X(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   c) La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Comme la fonction $x \mapsto x f_Y(x)$ est nulle sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $]0; +\infty[$, il suffit de prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_Y(x)\mathrm{d}x$.

   Pour tout réel $A > 0$:

$$\int_0^A x f_Y(x)\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A \frac{-x}{2\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = -\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_0^A = -\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} - 1\right)$$

   Or $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} -\frac{A^2}{2\sigma^2} = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A x f_Y(x)\mathrm{d}x = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$:

   On en déduit que l'intégrale impropre est bien convergente, donc que Y admet une espérance qui vaut :

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} x f_Y(x)\mathrm{d}x = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

3. On suppose dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.

   Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ composé de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi que Y.

   On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

a) La variable aléatoire S_n est bien un estimateur de σ (sa loi dépend de σ, mais pas son expression explicite), et par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{n}.n.\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Il s'agit donc d'un estimateur biaisé de σ, dont le biais vaut $b_\sigma(S_n) = E(S_n) - \sigma = \sigma\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 1\Big)$.

Considérons alors l'estimateur $T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}S_n$, alors par linéarité de l'espérance :

$E(T_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}E(S_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma$, ce qui prouve bien que T_n est un estimateur sans biais de σ.

b) D'après la formule du Keonig-Huygens, X de loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ admettant une espérance $E(X) = 0$ et une variance $V(X) = \sigma^2$: $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \sigma^2$.
Or puisque $Y = |X|$, alors $Y^2 = X^2$ et par conséquent, $E(Y^2) = \sigma^2$.
On en déduit que Y admet une variance, toujours donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \sigma^2 - \sigma^2.\frac{2}{\pi} = \sigma^2.\frac{\pi-2}{\pi}$$

On en déduit, d'après les propriétés de la variance et par indépendance mutuelle des $(Y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$:

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2}V\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) = \frac{\sigma^2(\pi-2)}{n\pi}$$

c) Toujours d'après les propriétés de la variance : $V(T_n) = \frac{\pi}{2}V(S_n) = \frac{\sigma^2(\pi-2)}{2n}$ qui est aussi le risque quadratique $r_\sigma(T_n)$ de T_n, puisque T_n est un estimateur sans biais de σ.
Il est alors évident que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} r_\sigma(T_n)$, ce qui prouve que T_n est un estimateur convergent de σ.

4. Avec la commande `Scilab` rappelée par l'énoncé, on peut compléter le script suivant :

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
X = grand(1,n,'nor',0,sigma) // simulations de X1,...,Xn
Y = abs(X)                   // simulations de Y1,...,Y_n
S = 1/n*sum(Y)
T = sqrt(%pi/2)*S
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1-p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Si $n = 1$, alors l'urne U ne contient que la boule 1, qui est forcément tirée et X est alors la variable certaine égale à 1 : on fait donc un et un seul tirage dans l'urne V, où le succès : "obtenir une boule blanche" est de probabilité p. La variable aléatoire Y suit donc la loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Dans le cas général : les n boules sont équiprobables, donc X suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. Ainsi :

$$X(\Omega) = [\![1;n]\!],\ \forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}, \quad E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

3. SOit k un élément de $[\![1;n]\!]$. Sachant que l'événement $[X = k]$ est réalisé : on effectue donc k tirages successifs avec remise, donc indépendants, dans l'urne V ; en définissant le fait d'obtenir une boule blanche comme le succès à chaque tirage, la variable aléatoire Y compte alors le nombre de succès dans la répétition de k épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p.

   La loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est donc la loi binomiale de paramètres (k,p) et pour tout entier i :

$$\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$$

4. L'énoncé rappelait ici comme simuler les quatre loi usuelles discrètes à l'aide de la fonction `grand`, ce qui était une façon de ne pas complètement donner la réponse dans la question posée (!) : seules les deux premières sont utiles pour compléter le script :

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
p = input('entrez la valeur de p : ')
X = grand(1,1,'uin',1,n)
Y = grand(1,1,'bin',X,p)
```

   La seule subtilité ici, est de bien choisir la valeur obtenue pour X comme variable comptant pour le nombre d'épreuves dans les paramètres de la loi binomiale utilisée ensuite pour Y.

5. a) Quelle que soit le numéro k de la boule tirée dans l'urne U, à la deuxième étape de l'expérience le nombre de boules blanches obtenues en k tirages peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et k ; comme k est au maximum égal à n, alors $Y(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

   En particulier la probabilité $\mathbb{P}(Y = 0)$ se calcule grâce à la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big([X = k]\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$, puisqu'on connaît toutes les probabilités $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = 0) = q^k$ $(= \binom{k}{0} p^0 q^{k-0}$, probabilité d'avoir k échecs en autant d'essais) :

$$\mathbb{P}(Y=0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k).\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.q^k = \frac{1}{n}.q.\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$$

   b) La même formule avec le même système complet donne, cette fois pour $i \in [\![1;n[\![$:

$$\mathbb{P}(Y=i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k).\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=i) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n}.\binom{k}{i} p^i q^{k-i}$$

   On a en effet tenu compte du fait que $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = i) = 0$ si $k < i$. La somme restante compte bien $n - i + 1$ éléments.

6. a) Soient i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$: l'égalité $i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$ est souvent connue comme la *formule sans nom*, qui se démontre assez simplement en revenant à l'expression des coefficients binomiaux avec les factorielles :

$$i\binom{k}{i} = i\times\frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} = k\times\frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!} = k\binom{k-1}{i-1} \quad \text{puisque } (k-1)-(i-1) = k-i$$

b) La variable aléatoire Y est finie, donc elle admet une espérance donnée par la formule :

$$E(Y) = \sum_{i=\cancel{0}\ 1}^{n} i\mathbb{P}(Y=i) = \sum_{i=1}^{n} i.\frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^i q^{k-i} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} i\binom{k}{i}p^i q^{k-i}$$

Dans cette somme double, les deux indices i et k sont liés par la relation : $1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$, et en échangeant l'ordre des deux indices, on est donc amené à écrire, en utilisant auss le résultat de la question précédente :

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} k\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right)$$

c) Avec un changement d'indice, on reconnaît le cas d'utilisation de la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i} \overset{[j=i-1]}{=} \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^{j+1}q^{k-(j+1)} = p\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^j q^{k-1-j} = p(p+q)^{k-1} = p$$

puisque $p+q=1$. On en déduit donc que :

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kp = \frac{p}{n}\times\sum_{k=1}^{n} k = \frac{p}{n}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)p}{2}$$

7. a) Selon le même principe qu'à la question 6 : d'après le théorème de transfert et puisque Y est une variable finie, alors $E\big(Y(Y-1)\big)$ existe et vaut

$$E\big(Y(Y-1)\big) = \sum_{i=\cancel{0}\ 2}^{n} i(i-1)\mathbb{P}(Y=i) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^i q^{k-i} = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=i}^{n} i(i-1)\binom{k}{i}p^i q^{k-i}$$

où pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant n$: $\quad i(i-1)\binom{k}{i} = (i-1)k\binom{k-1}{i-1} = k(k-1)\binom{k-2}{i-2}$
toujours en application de la formule sans nom redémontrée à la question 6.a).
Dans la double somme précédente, les deux indices sont liés par la relation $2 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$, et l'interversion des deux symboles sommes donne cette fois :

$$E\big(Y(Y-1)\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{k} k(k-1)\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}\right)$$

b) À nouveau, un changement d'indice et la formule du binôme de Newton permettent d'écrire :

$$\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i} \overset{[j=i-2]}{=} \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}p^{j+2}q^{k-(j+2)} = p^2\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}p^j q^{k-2-j} = p^2(p+q)^{k-2} = p^2$$

de sorte que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} E\big(Y(Y-1)\big) &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)p^2 = \frac{p^2}{n}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k) = \frac{p^2}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k\right) \\ &= \frac{p^2}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{p^2}{n}.\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3} - 1\right] \\ &= \frac{(n+1)p^2}{2}\times\frac{2n-2}{3} = \frac{(n+1)p^2(n-1)}{3} \end{aligned}$$

Ce qui est bien : $\quad E\big(Y(Y-1)\big) = \dfrac{(n^2-1)p^2}{3}$ d'après la troisième identité remarquable.

c) Lorsque $n=1$, on a vu que Y suit la loi de Bernoulli de paramètre p, et donc :
$E\big(Y(Y-1)\big) = 0(0-1)\mathbb{P}(Y=0)+1(1-1)\mathbb{P}(Y=1) = 0$, ce qui est bien aussi la valeur de $\dfrac{(n^2-1)p^2}{3}$ dans le cas où $n=1$.

d) On remarque ici (c'est un grand classique) que $Y(Y-1) = Y^2 - Y \iff Y^2 = Y(Y-1)+Y$, donc par linéarité de l'espérance :
$E(Y^2) = E\big(Y(Y-1)\big)+E(Y)$ et, Y admet une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Y) = E\big(Y(Y-1)\big)+E(Y)-E(Y)^2$$

(qui vaut donc $\dfrac{(n^2-1)p^2}{3}+\dfrac{(n+1)p}{2}-\dfrac{(n+1)^2p^2}{4}$, mais on ne demandait pas d'aller plus loin)

Problème

1. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, les fonctions $x\mapsto\dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x\mapsto\dfrac{x^n}{1+x}$ sont bien définies sur $[0;1]$ (car $1+x\geqslant 1>0$ si $0\leqslant x\leqslant 1$) et continues sur cet intervalle, ce qui suffit à garantir la bonne définition, pour tout n de $\mathbb{N}$, des intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \quad\text{et}\quad J_n = \int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

2. $I_0 = \displaystyle\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{1+x}\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$.

On aura reconnu la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=1+x$, qui a pour primitive $-\dfrac{1}{u}$. Pour $I_1 = \displaystyle\int_0^1\frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$ il y a plusieurs façons possibles de procéder, qui demandent toute de l'initiative ; voici une façon possible de procéder, en écrivant :

$$I_1 = \int_0^1\frac{x+1-1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\Big(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\Big]_0^1 = \ln(2)+\frac{1}{2}-\ln(1)-1 = \ln(2)-\frac{1}{2}$$

3. a) Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n = \int_0^1\Big(\frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x^n(1+x)^2}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

b) La relation précédente s'écrit, lorsque $n=0$:

$$I_2+2I_1+I_0 = 1 \iff I_2 = 1-2I_1-I_0 = 1-2\ln(2)+1-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-2\ln(2)$$

c) Le script `Scilab` suivant calcule de proche en proche les intégrales I_k grâce à la relation
$I_k = \dfrac{1}{k-1}-2I_{k-1}-I_{k-2}$, valable pour tout entier $k\geqslant 2$ (décalage d'indice par rapport à la relation de récurrence précédente). On remarque d'ailleurs que les deux valeurs initiales de I_0 et I_1 étaient en fait données ici par l'énoncé !
Le script suit le mode de calcul habituel des suites définies par une relation de récurrence sur deux générations : la variable `a` contient toujours l'avant-dernière intégrale calculée, et `b` contient la dernière intégrale calculée, la variable `aux` servant de variable auxiliaire pour gérer les transferts de valeurs.

```
n = input('donnez la valeur pour n : ')
a = 1/2
b = log(2)-1/2
for k = 2:n
    aux = a
    a = b
    b = 1/(k-1) - 2*b - aux
end
disp(b)
```

4. a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in [0;1]$:

   $0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow 1 \leqslant (1+x)^2 \leqslant 4 \Longrightarrow 0 \leqslant \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n.$

   Les fonctions concernées sont continues sur $[0;1]$, et $0 < 1$: par croissance et positivité de l'intégrale, on en déduit que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   b) Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$, c'est bien sûr le théorème d'encadrement qui permet de conclure que la suite (I_n) converge, et que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

5. Comme l'énoncé le demande, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ en posant :

   $$u'(x) = x^n \qquad \longrightarrow \quad u'(x) = nx^{n-1}$$
   $$v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad \longrightarrow \quad v(x) = -\frac{1}{1+x}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, donc :

   $$I_n = \left[-\frac{x^n}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-nx^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} + n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$$

6. a) $J_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln(2)$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale une fois de plus :

   $$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

   (troisième fois qu'on a besoin du calcul de cette dernière intégrale !)

   b) Pour $n = 0$, la relation s'écrit : $\quad J_0 + J_1 = 1 \iff J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln(2)$.

7. Là encore on réécrit la relation de récurrence vérifiée par la suite (J_n) sous la forme :

   $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J_k = \dfrac{1}{k} - J_{k-1}$ pour l'adapter au calcul via la boucle `for` dans le script ci-dessous.

   La relation obtenue à la question 5 permet alors de retrouver la valeur de I_n.

```
n = input('donner une valeur pour n : ')
J = log(2)
for k = 1:(n-1)
    J = 1/k - J
end
I = n*J-1/2
disp(I)
```

8. Le plus simple est ici de démontrer par récurrence la formule demandée :

pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: " $J_n = (-1)^n\Big(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big)$".

$\boxed{\text{I.}}$ pour $n = 1$: on sait que $J_1 = 1 - \ln(2)$, et d'autre part

$(-1)^1\Big(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{1-1}}{1}\Big) = -\big(\ln(2) - \frac{(-1)^0}{1}\big) = -\ln(2) + 1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $\quad J_{n+1} = (-1)^{n+1}\Big(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big)$.

D'après la relation obtenue en 6.a) :

$$\begin{aligned}
J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - J_n &\overset{H.R.}{=} \frac{1}{n+1} - (-1)^n\Big(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big) \\
&= \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1}\Big(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1}\Big) \\
&= \frac{1}{n+1} + \underbrace{\frac{(-1)^{2n+1}}{n+1}}_{=-\frac{1}{n+1}} + (-1)^{n+1}\Big(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big) \qquad (2n+1 \text{ est impair})
\end{aligned}$$

$$J_{n+1} = (-1)^{n+1}\Big(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big) \qquad \text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie si } \mathcal{P}(n) \text{ l'est.}$$

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

9. a) La relation de la question 5 se réécrit : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2} \iff J_n = \frac{I_{n+1} + 1/2}{n+1}$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ d'après 4.b), alors par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

   b) Pour éliminer le problème du facteur $(-1)^n$ qui est le terme général d'une suite divergente, on passe par exemple par la valeur absolue :

   $\lim\limits_{n\to+\infty} |J_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \Big|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big| = 0$, ce qui revien à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$:

   la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, appelée *série harmonique alternée*, converge et a pour somme totale $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

   c) Le résultat de la question 5. se réécrit : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2} \iff nJ_n = I_{n+1} - J_n + \frac{1}{2}$, donc :

   $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n = \lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} - J_n + \frac{1}{2} = 0 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

   Ce résultat s'écrit aussi : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} 2nJ_n = 1, \quad$ donc $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(2) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n u_n = J_n \iff u_n = (-1)^{-n} J_n = (-1)^n J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$ puisque $(-1)^{-n} = \left(\frac{1}{-1}\right)^n = (-1)^n$ et puisque l'équivalence est compatible avec le produit.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{1}{2}.\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est, à un facteur constant près, la série dont on a démontré la convergente à la question 9 : il s'agit bien d'une série convergente, et sa somme totale vaut d'ailleurs $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k} = -\frac{1}{2}\ln(2)$.

On ne peut cependant pas en déduire la nature de la série de terme général u_n, malgré l'équivalence obtenue en 10.a) : en effet, $(-1)^n$ change de signe d'un terme à l'autre, et le théorème de comparaison des séries n'est valable que pour des séries à termes **positifs**.

Impossible non plus de passer par l'absolue convergence, puisque $\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$ est le terme général d'une série divergente, et cela ne signifie pas pour autant que la série de départ ne peut pas converger.

11. L'énoncé se proposait, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, l'énoncé admettait le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite converge vers ℓ.
Ndla : Il s'agit d'un résultat classique sur les suites réelles, pas officiellemet au programme de ECE ; cette indication de l'énoncé était donc très bienvenue !

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Partons du membre de droite qui est le plus complexe : pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k = k(u_{k+1} - u_k) + u_{k+1} + (-1)^k = (k+1)\left(u_k - \frac{(-1)^{k+1-1}}{k+1}\right) - ku_k + (-1)^k$$
$$= ku_k + u_k - (-1)^k - ku_k + (-1)^k = u_k$$

b) Par sommation de l'égalité précédente lorsque k varie de 1 à n, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)u_{k+1} - ku_k\right) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$
$$\iff S_n = \sum_{j=2}^{n+1} ju_j - \sum_{k=1}^{n} ku_k + (-1)^1.\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}$$
$$\iff S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

À la deuxième étape a eu lieu un télescopage dans la somme de gauche, tandis qu'on à reconnu dans celle de droite une somme géométrique de raison $-1 \neq 1$.

c) En réécrivant l'égalité précédente aux rangs $2n$ et $2n+1$, on obtient, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$S_{2n} = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 + 0 \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - u_1 - 1$$

puisque $(-1)^{2n} = 1$ vu que $2n$ est paire, et $(-1)^{2n+1} = -1$ puisque $2n+1$ est impair.

Comme par ailleurs on a vu que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$, alors :

$$u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2(2n+1)} \iff (2n+1)u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2}$$

et $u_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2(2n+2)} \iff (2n+2)u_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$, de sorte que, sachat que $u_1 = \ln(2) - 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = -\frac{1}{2} - u_1 = -\frac{1}{2} - \ln(2) + 1 = \frac{1}{2} - \ln(2) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - u_1 - 1 = \frac{1}{2} - \ln(2) + 1 - 1 = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

Ces deux résultats, associés à la propriété admise par l'énoncé au début de cette question 11., prouve que la suite (S_n) converge vers $\dfrac{1}{2} - \ln(2)$, c'est-à-dire que la série de terme général u_n est convergente et de somme totale :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

12. Il faut ici remarquer que le résultat de 9.b) permet en fait d'écrire u_n sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

(u_n est en fait le *reste d'ordre* n de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$).
Le résultat de la question précédente s'écrit donc :

$$\frac{1}{2} - \ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

ce qui correspond à la proposition c) de l'énoncé.

★ ★ ★ FIN DU SUJET ★ ★ ★