Corrigé 2018

Exercice 1

1) On sait que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si $ad-bc=0$.

Ici, on a $ad-bc=1\times 6-2\times 3=0$ donc :

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$$

2) On a $A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels $A-\lambda I$ n'est pas inversible, c'est-à-dire pour lesquels : $(1-\lambda)(6-\lambda)-2\times 3=0$.

Les valeurs propres de la matrice A sont donc les solutions de : $\lambda^2-7\lambda=0$.

On a donc $\lambda(\lambda-7)=0$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } 0 \text{ et } 7}$$

On trouve le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 en résolvant $AX=0X$, avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases}$ et se réduit à : $x+2y=0$.

On a donc $X=\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 0 est } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

On trouve le sous-espace propre associé à la valeur propre 7 en résolvant : $AX=7X$, avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases} x+2y=7x \\ 3x+6y=7y \end{cases}$, ou encore $\begin{cases} -6x+2y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

La première équation est la même que la deuxième donc il reste : $3x-y=0$.

On a donc $X=\begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 7 est } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}$$

3) • Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $f(M)=AM$, et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est stable pour le produit matriciel, on est certain que $f(M)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Si on se donne deux matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et un réel λ, on a, grâce aux propriétés du produit matriciel :

$$f(M+\lambda N)=A(M+\lambda N)=AM+\lambda AN=f(M)+\lambda f(N)$$

Les deux points précédents prouvent que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

4) a) Soit M une matrice de $\text{Ker}(f)$. On a donc $AM=0$ et en notant $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ceci s'écrit : $\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il reste : $\begin{cases} a+2c=0 \\ b+2d=0 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} a=-2c \\ b=-2d \end{cases}$. On a donc :

$$M=\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $\text{Ker}(f)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Comme les matrices $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles, la famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\text{Ker}(f)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Ker}(f) \text{ est de dimension } 2}$$

b) Comme f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4, le théorème du rang s'écrit : $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)=4$.

On en déduit :

$$\boxed{\dim \text{Im}(f)=2}$$

c) $f(E_1)=AE_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$f(E_2)=AE_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$f(E_3)=AE_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

$f(E_4)=AE_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

On a donc : $f(E_1)=E_1+3E_3$.

$f(E_2)=E_2+3E_4$.

$f(E_3)=2E_1+6E_3$.

$f(E_4)=2E_2+6E_4$.

On sait que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\big(f(E_1),f(E_2),f(E_3),f(E_4)\big)$ mais $f(E_3)=2f(E_1)$ et $f(E_4)=2f(E_2)$ donc :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\big(f(E_1),f(E_2)\big)=\mathrm{Vect}\big(E_1+3E_3,E_2+3E_4\big)$$

On a une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, qui est constituée de 2 vecteurs donc, comme $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, cette famille est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Conclusion :

$$\boxed{\big(E_1+3E_3,E_2+3E_4\big) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$$

5) a) On a, par linéarité de *f* et grâce à $f(E_3)=2f(E_1)$ et $f(E_4)=2f(E_2)$:

$f(E_1+3E_3)=f(E_1)+3f(E_3)=f(E_1)+6f(E_1)=7f(E_1)=7(E_1+3E_3)$.

$f(E_2+3E_4)=f(E_2)+3f(E_4)=f(E_2)+6f(E_2)=7f(E_2)=7(E_2+3E_4)$.

b) Comme les matrices E_1+3E_3 et E_2+3E_4 ne sont pas nulles, ceci montre que E_1+3E_3 et E_2+3E_4 sont vecteurs propres de *f* associés à la valeur propre 7 et ainsi, le sous-espace propre de *f* associé à la valeur propre 7 est au moins de dimension 2 puisque (E_1+3E_3,E_2+3E_4) est une famille libre.

Par ailleurs, le sous-espace propre de *f* associé à la valeur propre 0 est $\mathrm{Ker}(f)$ qui est de dimension 2, et comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas excéder la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est égale à 4, alors le sous-espace propre de *f* associé à la valeur propre 7 est de dimension exactement 2.

On peut donc conclure que *f* a deux valeurs propres, 0 et 7, et que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, d'où l'on déduit :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

6) a) Comme $X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^tX\in\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, et ainsi le produit $X\,{}^tX$ est élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit λ une valeur propre de *A* et *X* un vecteur colonne propre non nul associé. On a $AX=\lambda X$, et en multipliant par ${}^tX$, on obtient $AX\,{}^tX=\lambda X\,{}^tX$, c'est-à-dire :

$$f(X\,{}^tX)=\lambda X\,{}^tX$$

Montrons que $X\,{}^tX$ n'est pas nul afin de pouvoir conclure que $X\,{}^tX$ est vecteur propre de *f* associé à la valeur propre λ.

Avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a $X\,{}^tX=\begin{pmatrix}x^2 & xy\\ xy & y^2\end{pmatrix}$. Si $X\,{}^tX$ était nul, on aurait, entre autres, $x^2=y^2=0$, soit $x=y=0$ ce qui donnerait : $X=0$. Ceci contredit l'hypothèse faite sur *X*. Ainsi, $X\,{}^tX$ est vecteur propre de *f* associé à la valeur propre λ, ce qui prouve que :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } f}$$

b) Soit λ une valeur propre de f et soit M une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
On a, par définition, $f(M) = \lambda M$, ce qui se traduit par : $AM = \lambda M$.

En notant C_1 et C_2 les colonnes de M, on obtient : $\begin{cases} AC_1 = \lambda C_1 \\ AC_2 = \lambda C_2 \end{cases}$ (*)

Comme M n'est pas la matrice nulle, au moins une des colonnes C_1 ou C_2 n'est pas nulle et est donc vecteur propre de A pour la valeur propre λ, ceci grâce à (*).
Conclusion :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } A}$$

Exercice 2 ....

1) a) La formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements (A_0, A_1, A_2) s'écrit :
$P(X = 1) = P(A_0)\, P_{A_0}(X = 1) + P(A_1)\, P_{A_1}(X = 1) + P(A_2)\, P_{A_2}(X = 1)$

On a, bien sûr, $P_{A_0}(X = 1) = \dfrac{1}{2}$, $P_{A_1}(X = 1) = 0$ et $P_{A_2}(X = 1) = 1$.

En remplaçant, on obtient : $P(X = 1) = \dfrac{1}{2} P(A_0) + P(A_2)$.

Comme $P(A_0) = P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{1}{3}$, on obtient : $P(X = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}$.

Finalement :

$$\boxed{P(X = 1) = \frac{1}{2}}$$

b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a, de la même façon :
$P(X = n) = P_{A_0}(X = n) P(A_0) + P_{A_1}(X = n) P(A_1) + P_{A_2}(X = n) P(A_2)$.

On a $P_{A_0}(X = n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$: c'est le rang d'apparition du premier "pile" lors de lancers indépendants d'une pièce donnant "pile" avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et donnant "face" avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, ce qui prouve que la loi de X, conditionnellement à A_0, est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

De plus, $P_{A_1}(X = n) = 0$ car la pièce numérotée 1 n'a pas de "pile" et $P_{A_2}(X = n) = 0$ car la pièce numérotée 2 a 2 "piles", donc le premier "pile" ne peut survenir qu'au premier lancer (ici, on a $n \geq 2$).

En remplaçant :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ P(X=n)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Remarque. On pouvait très bien expliquer que, comme n est supérieur ou égal à 2, la seule façon de réaliser $(X=n)$ est de choisir la pièce numérotée 0 (une chance sur trois) puis de faire $n-1$ faces suivis d'un pile (probabilité égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ par indépendance).

c) D'après l'énoncé, X est une variable aléatoire donc $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$.

On en déduit que $P(X=0)+P(X=1)+\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)=1$.

Or $\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}\right)$, d'où :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)=\frac{1}{3}\left(2-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$$

Dès lors, on obtient : $P(X=0)+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$ et on peut conclure :

$$\boxed{P(X=0)=\frac{1}{3}}$$

2) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$n\,P(X=n)=n\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{6}\times n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ceci montre que la série de terme général $n\,P(X=n)$ est absolument convergente (car proportionnelle à la série géométrique "dérivée" de raison $\frac{1}{2}$, comprise strictement entre –1 et 1).

Par conséquent :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance}}$$

On a alors :

$E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} n\,P(X=n)=P(X=1)+\sum_{n=2}^{+\infty} n\,P(X=n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$E(X)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}-1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

Finalement :

$$\boxed{E(X)=1}$$

3) On a : $n(n-1)P(X=n)\ = n(n-1)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\ =\ \frac{1}{12}\times n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

La série de terme général $n(n-1)\ P(X=n)$ est absolument convergente (car proportionnelle à la série géométrique “dérivée seconde” dont la raison $\frac{1}{2}$ est comprise strictement entre -1 et 1).

Par conséquent, $X(X-1)$ possède une espérance et on obtient successivement :

$$E\big(X(X-1)\big)=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)P(X=n)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)P(X=n)\,.$$

$$E\big(X(X-1)\big)=\frac{1}{12}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\quad\text{(calcul fait en début de question).}$$

$$E\big(X(X-1)\big)=\frac{1}{12}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}\ =\ =\frac{1}{12}\times 16=\frac{4}{3}\,.$$

Comme $X^2=X(X-1)+X$ et comme X et $X(X-1)$ ont une espérance, on en déduit, par linéarité de l'espérance, que X a un moment d'ordre 2 qui est donné par : $E\left(X^2\right)=E\big(X(X-1)\big)+E(X)=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$.

Pour finir, on a : $V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{7}{3}-1$.

Soit :

$$\boxed{V(X)=\frac{4}{3}}$$

4) Si l'on échange les mots "pile" et "face" dans la phrase décrivant les trois pièces avec lesquelles on joue, on constate que la description est la même : il y a encore une pièce équilibrée P_0, une pièce P_1 comportant deux "piles" et une troisième pièce P_2 comportant deux "faces" : les pièces P_1 et P_2 sont échangées mais les calculs sont les mêmes qu'aux questions 1a), 1b) et 1c) et ils montrent que le rang du premier "face" suit la même loi que le rang du premier "pile".

Conclusion :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}}$$

5) a) Si $(Y=j)$ est réalisé, avec $j\geq 2$, alors le premier "face" n'est pas arrivé au premier lancer, c'est donc que le premier lancer a donné "pile", ce qui signifie que $(X=1)$ est réalisé.

On a donc $(Y=j)\subset(X=1)$, de quoi l'on déduit : $(Y=j)\cap(X=1)=(Y=j)$.

On a alors :

$$\boxed{\forall j\geq 2\,,\ P\big([X=1]\cap[Y=j]\big)=P(Y=j)}$$

b) De la même façon, si ($X = i$) est réalisé, avec $i \geq 2$, alors le premier "pile" n'est pas arrivé au premier lancer, c'est donc que le premier lancer a donné "face", c'est-à-dire que ($Y = 1$) est réalisé.
On a donc $(X = i) \subset (Y = 1)$, de quoi l'on déduit : $(X = i) \cap (Y = 1) = (X = i)$.
On obtient alors :

$$\boxed{\forall i \geq 2\,,\ P([X=i]\cap[Y=1]) = P(X=i)}$$

6) a) Comme la pièce choisie va bien donner "pile" ou "face" au premier lancer, les deux variables X ou Y ne peuvent pas prendre toutes les deux la valeur 0 donc $X+Y$ non plus.
Pour que $X+Y$ prenne la valeur 2, il faudrait :

- Soit que X prenne la valeur 0 et Y la valeur 2, ce qui n'est pas possible, puisque si X prend la valeur 0, c'est que l'on n'a pas obtenu de "pile" et dès lors Y prend certainement la valeur 1 (le premier "face" survient au premier lancer).
- Soit que X prenne la valeur 2 et Y la valeur 0, ce qui n'est pas possible pour les mêmes raisons que ci-dessus.
- Soit que X prenne la valeur 1 et Y la valeur 1, ce qui n'est pas possible, puisqu'on ne peut pas avoir le premier "pile" et le premier "face" tous les deux au premier lancer (avec une seule pièce).

Sinon, $X+Y$ peut prendre la valeur 1 (il suffit de lancer l'une des deux pièces numérotées 1 ou 2) et $X+Y$ peut prendre n'importe quelle valeur n supérieure ou égale à 3, il suffit de lancer la pièce numérotée 0 et de faire, par exemple $n-1$ fois "pile" puis "face".
Conclusion :

$$\boxed{X+Y \text{ prend toutes les valeurs entières positives sauf } 0 \text{ et } 2}$$

b) On a $(X+Y=1) = ([X=1]\cap[Y=0]) \cup ([X=0]\cap[Y=1])$.
Si $(Y=0)$ est réalisé, alors on n'obtient aucun "face", donc on a un "pile" au premier lancer et ainsi l'événement $(Y=0)$ est inclus dans l'événement $(X=1)$.
On a donc $([X=1]\cap[Y=0]) = (Y=0)$. Par conséquent :

$$P([X=1]\cap[Y=0]) = P(Y=0) = \frac{1}{3}$$

De même, l'événement $(X=0)$ est inclus dans l'événement $(Y=1)$ donc :

$$([X=0]\cap[Y=1]) = (X=0)$$

Par conséquent : $P([X=0]\cap[Y=1]) = P(X=0) = \dfrac{1}{3}$.

Par incompatibilité, on obtient :

$$\boxed{P\left(X+Y=1\right) = \frac{2}{3}}$$

c) Quelle que soit la pièce choisie, il est certain que l'une des deux variables X ou Y (et une seule) prendra la valeur 1 (en effet, soit le premier lancer donne "pile" et $(X=1)$ est réalisé, soit le premier lancer donne "face" et $(Y=1)$ est réalisé.
Par conséquent, pour n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X+Y=n)=\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$$

d) Par incompatibilité, on trouve :

$$P(X+Y=n)=P\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)+P\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$$

Comme $n-1\geq 2$, on peut appliquer les questions 5a) et 5b), ce qui donne :

$$P(X+Y=n)=P(Y=n-1)+P(X=n-1)$$

On a vu que X et Y suivent la même loi donc : $P(X+Y=n)=2P(X=n-1)$.
En remplaçant, d'après la question 1b), on trouve :

$$\boxed{P(X+Y=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

7) a) L'instruction `piece=grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard 0, 1 ou 2, et permet de simuler le choix de la pièce.
L'égalité `piece= =0` signifie que l'on joue avec la pièce équilibrée.
L'instruction `lancer=grand(1,1,'uin',0,1)` renvoie au hasard 0 ou 1, et permet de simuler le lancer de la pièce. Il suffit maintenant d'incrémenter la valeur de x jusqu'à ce que l'on obtienne un "pile", c'est-à-dire jusqu'à ce que l'on ait `lancer= =1`.
L'égalité `piece= =1` signifie que l'on joue avec la pièce donnant "face" à coup sûr donc X prendra la valeur 0.
On peut alors compléter le script de la façon suivante :

```
piece=grand(1,1,'uin',0,2)
x=1
if piece==0
then
   lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
   while lancer==0
   lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
   x=x+1
   end
else
   if piece==1 then x=0
   end
end
disp(x)
```

b) Si l'on joue avec la pièce 2, il est certain que X prend la valeur 1 mais comme la variable informatique x a été initialisée à 1, il n'y a rien à ajouter.

Exercice 3 ....

1) • La restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$ est nulle.

Sur $\mathbb{R}_+$, $f(x)$ est un produit de réels positifs puisque $a > 0$, $x \geq 0$ et $e^{-x^2/2a} > 0$.
Par conséquent, f est positive sur $\mathbb{R}$.

• La restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$, est nulle, elle est donc continue sur cet intervalle.
De plus, la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est la composée, puis le produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

• Pour finir, $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = 0$ et, pour tout x positif, on a :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{t}{a} e^{-t^2/2a} dt = \left[-e^{-t^2/2a}\right]_0^x = -e^{-x^2/2a} + 1$$

Comme $a > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - e^{-x^2/2a}\right) = 1 - 0 = 1$, ce qui, par définition de la convergence d'une intégrale impropre, signifie que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

On a donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Les trois points précédents prouvent que :

$$\boxed{f \text{ est une densité}}$$

2) Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, on a : $\forall x < 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

Pour tout réel x positif ou nul, on a, d'après le calcul fait à la première question :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x f(t)dt = 0 + 1 - e^{-x^2/2a}$$

Bilan :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

3) a) • On a $Y = \dfrac{X^2}{2a}$, X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $a > 0$ donc :

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{R}_+}$$

Dès lors, on obtient : $\forall x < 0$, $F_Y(x) = 0$.

- De plus, pour tout réel x positif, on a (car $a>0$) :

$$F_Y(x)=P(Y\le x)=P\left(\frac{X^2}{2a}\le x\right)=P(X^2\le 2ax)=P\left(-\sqrt{2ax}\le X\le\sqrt{2ax}\right)$$

On a donc : $\forall x\ge 0$, $F_Y(x)=F_X\left(\sqrt{2ax}\right)-F_X\left(-\sqrt{2ax}\right)$.

X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $-\sqrt{2ax}\le 0$ donc $F_X\left(-\sqrt{2ax}\right)=0$, et ainsi :

$\forall x\ge 0$, $F_Y(x)=F_X\left(\sqrt{2ax}\right)=1-e^{-\left(\sqrt{2ax}\right)^2/2a}=1-e^{-2ax/2a}=1-e^{-x}$.

Grâce aux deux points précédents, on voit que :

$$\boxed{Y \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } 1}$$

b) On a $Y=\dfrac{X^2}{2a}$ et X prend des valeurs positives donc $X=\sqrt{2aY}$, et comme une simulation `Scilab` de la variable aléatoire Y est `grand(1,1,'exp',1)`, on en déduit les lignes suivantes :

```
a=input('donnez une valeur pour a :')
Y=grand(1,1,'exp',1)
X=sqrt(2*a*Y)
```

4) a) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien centré en 0, et de plus, on a :

$$g(-x)=(-x)^2e^{-(-x)^2/2a}=x^2e^{-x^2/2a}=g(x)$$

Conclusion :

$$\boxed{g \text{ est paire}}$$

b) Si Z suit la loi normale de paramètres 0 et a, on sait que Z possède un moment d'ordre 2 défini par : $E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{2\pi}}x^2e^{-x^2/2a}dx$. On a donc :

$$\boxed{E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}x^2e^{-x^2/2a}dx}$$

De plus, on a : $V(Z)=a$ et $E(Z)=0$. Par conséquent :

$$\boxed{E(Z^2)=a}$$

c) • On a déjà $\int_{-\infty}^{0}xf(x)dx=0$ (sans aucun problème de convergence puisque f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$).

- Pour tout réel x positif ou nul, on a : $xf(x)=\dfrac{x^2}{a}e^{-x^2/2a}$.

Or on sait, d'après la question 4b), que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} x^2 e^{-x^2/2a} dx = a$.

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2a} dx$ converge (elle converge absolument puisque la fonction intégrée est positive) et est égale à $a\sqrt{2\pi a}$. Comme g est paire, on en déduit : $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2a} dx = \frac{a\sqrt{2\pi a}}{2}$.

En divisant par a, on obtient : $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-x^2/2a} dx = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2}$.

Ceci s'écrit $\int_{0}^{+\infty} x f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}$.

- Conclusion : les deux points précédents prouvent que X a une espérance, avec de plus :

$$\boxed{E(X) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}}$$

5) a) On a vu, à la question 3), que la variable $Y = \frac{X^2}{2a}$ suit la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, Y possède une espérance égale à 1, donc, comme $X^2 = 2aY$, on a par linéarité de l'espérance : $E(X^2) = 2aE(Y) = 2a \times 1$.

Conclusion :

$$\boxed{E(X^2) = 2a}$$

b) La variance de X est donnée par : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2a - \frac{\pi a}{2}$.

En réduisant au même dénominateur :

$$\boxed{V(X) = \frac{(4-\pi)a}{2}}$$

6) a) • S_n est un estimateur car c'est une fonction d'un échantillon de la loi de X, et cette fonction est indépendante du paramètre a que l'on veut estimer.

- Comme X possède un moment d'ordre 2, les variables X_k aussi, donc S_n possède une espérance, et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} 2a = \frac{1}{2n} \times 2na = a$$

Conclusion :

$$\boxed{S_n \text{ est un estimateur sans biais de } a}$$

b) Toujours grâce à la question 3), on a $X^2 = 2aY$ donc, par propriété de la variance : $V(X^2) = 4a^2 V(Y)$.

Comme $V(Y)=1$, on peut conclure :

$$\boxed{X^2 \text{ possède une variance et } V(X^2)=4a^2}$$

c) X^2 possède une variance donc S_n aussi, et par propriété de la variance, on a : $V(S_n)=\dfrac{1}{4n^2}V\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2\right)$.

Les variables X_k sont mutuellement indépendantes donc les variables X_k^2 le sont aussi, et on peut écrire : $V(S_n)=\dfrac{1}{4n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} V\left(X_k^2\right)$.

Comme les X_k ont la même loi que X, elles ont la même variance que X, et ainsi :

$$V\left(X_k^2\right)=V\left(X^2\right)=4a^2$$

On trouve alors : $V(S_n)=\dfrac{1}{4n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} 4a^2=\dfrac{1}{4n^2}\times n\times 4a^2=\dfrac{a^2}{n}$.

Pour finir, le biais de S_n est nul, on en déduit : $r_a(S_n)=V(S_n)+b_a(S_n)^2=V(S_n)$, et ainsi :

$$\boxed{r_\theta(S_n)=\frac{a^2}{n}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_a(S_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^2}{n}=0$, on peut conclure (c'est une condition suffisante) :

$$\boxed{S_n \text{ est un estimateur convergent de } a}$$

7) a) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n s'écrit :

$$\forall\varepsilon>0,\ P(|S_n-E(S_n)|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ P(|S_n-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{a^2}{n\varepsilon^2}}$$

Comme on suppose $a\leq 1$, on peut prolonger :

$$\forall\varepsilon>0,\ P(|S_n-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{n\varepsilon^2}$$

On en déduit (événement contraire) : $\forall\varepsilon>0,\ 1-P(|S_n-a|<\varepsilon)\leq\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$.

Ceci donne alors : $\forall\varepsilon>0,\ P(|S_n-a|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$.

Comme $(|S_n - a| < \varepsilon) \subset (|S_n - a| \le \varepsilon)$, on obtient, par croissance de la probabilité :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\,,\ P(|S_n - a| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}}$$

b) On peut aussi écrire $P(|a - S_n| \le \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{1}{n\varepsilon^2}$, soit :

$$P(-\varepsilon \le a - S_n \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

On a donc :

$$P(S_n - \varepsilon \le a \le S_n + \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

On peut affirmer que l'intervalle $[S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance pour *a*, avec un niveau de confiance au moins égal à $1 - \dfrac{1}{n\varepsilon^2}$.

Pour finir, il suffit de choisir $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, qui est bien strictement positif, ce qui donne : $P\left(S_n - \dfrac{1}{10} \le a \le S_n + \dfrac{1}{10}\right) \ge 1 - \dfrac{100}{n}$.

Avec $n = 2000$, on obtient :

$$P\left(S_n - \frac{1}{10} \le a \le S_n + \frac{1}{10}\right) \ge 1 - \frac{1}{20}$$

Conclusion : $\left[S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour *a*, avec un niveau de confiance au moins égal à $\dfrac{19}{20}$, soit 95%.

Problème ....

Partie 1

1) a) Remarquons tout d'abord que *f* est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur tout intervalle de la forme $[0, x]$ ou $[x, 0]$.

Comme $1 + t^2 \ge 1$, on a $\ln(1+t^2) \ge 0$. Ainsi, il y a deux cas à étudier :

- Si $x \ge 0$, $f(x)$ est positif, comme intégrale, bornes dans l'ordre croissant d'une fonction positive.
- Si $x \le 0$, $f(x)$ est négatif, comme intégrale, bornes dans l'ordre décroissant d'une fonction positive.

$$\boxed{f(x) \text{ est positif sur } \mathbb{R}_+ \text{ et négatif sur } \mathbb{R}_-}$$

b) La fonction $g: t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et *f* est une primitive de *g* (celle qui s'annule en 0) donc *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Par définition, on a $f'(x) = g(x)$, ce qui donne :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln(1+x^2)}$$

c) On a déjà vu que, pour tout réel *x*, $\ln(1+x^2)$ est positif (en s'annulant seulement en 0) donc :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

2) a) La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0 et en effectuant le changement de variable $u = -t$, qui est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0,x]$ ou $[x,0]$), on a :

$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1+t^2)dt = \int_0^x \ln\left(1+(-u)^2\right)(-du) = -\int_0^x \ln(1+u^2)du = -f(x)$$

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est impaire}}$$

b) La fonction f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions usuelles de classe C^1) et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
La dérivée seconde de *f* s'annule en changeant de signe en 0, elle est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$ ce qui prouve que *f* est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$ et que le seul point d'inflexion de la courbe représentative de *f* est le point $(0,0)$, origine du repère.

3) a) On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $a + \dfrac{b}{1+t^2} = \dfrac{a+b+at^2}{1+t^2}$, ce qui implique :

$$\frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{a+b+at^2}{1+t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$$

(par identification des coefficients au numérateur). On a donc : $a = 1$ et $b = -1$.
Bilan :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x 1 \times \ln(1+t^2)dt$.

En posant $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v'(t) = 1$, on a $u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et on peut prendre $v(t) = t$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on peut procéder à l'intégration par parties, ce qui donne :

$f(x) = \left[t\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^x - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$.

En utilisant la question précédente, on obtient :

$f(x) = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int_0^x \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int_0^x 1dt + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

Par linéarité de l'intégration, on en déduit :

$$f(x) = x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

Finalement :

$$\boxed{f(x) = x\left(\ln\left(1+x^2\right)-2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt}$$

4) a) La fonction $h: t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve que l'intégrale proposée ne pose un problème que par la présence de la borne $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et, comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2>1$), on en déduit, grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est également convergente.

Par continuité de la fonction intégrée, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ existe donc, en tout :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \text{ est une intégrale convergente}}$$

b) La convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ signifie que $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+x^2\right)-2\right) = +\infty$, on en déduit que $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est négligeable devant $x\left(\ln\left(1+x^2\right)-2\right)$ au voisinage de $+\infty$, donc, d'après l'égalité obtenue à la question 3b) : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\left(\ln\left(1+x^2\right)-2\right)$.

Comme 2 est négligeable devant $\ln\left(1+x^2\right)$, on peut simplifier et il reste :

$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)}$$

c) Pour tout réel x, on a : $\ln\left(1+x^2\right) = \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

On sait que $\ln(x^2)=2\ln|x|$, donc, pour tout réel x *strictement positif*, on a :

$$\boxed{\ln\left(1+x^2\right)=2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

Pour finir, $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est négligeable devant $2\ln x$ (qui tend vers $+\infty$), et ainsi on a $\ln\left(1+x^2\right)\underset{+\infty}{\sim}2\ln x$.
On peut maintenant conclure :

$$\boxed{f(x)\underset{+\infty}{\sim}2x\ln x}$$

d) Pour tout réel x négatif, on a, par imparité de f : $f(x)=-f(-x)$.
Quand x tend vers $-\infty$, on a $-x$ qui tend vers $+\infty$ et on peut appliquer l'équivalent précédent, ce qui donne : $f(x)\underset{-\infty}{\sim}-2(-x)\ln(-x)$
En simplifiant :

$$\boxed{f(x)\underset{-\infty}{\sim}2x\ln(-x)}$$

5) a) La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=\frac{2x}{1+x^2}$. Dès lors on voit que f'' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme quotient bien défini de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
En conclusion :

$$\boxed{f\text{ est de classe } C^3 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

b) On a : $f(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)dt$

$$f'(x)=\ln\left(1+x^2\right)$$

$$f''(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\times 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

On en déduit :

$$\boxed{f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=0 \text{ et } f^{(3)}(0)=2}$$

c) En appliquant la formule rappelée, on trouve : $f(x)=\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$.

On obtient par conséquent :

$$\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}}$$

6) Grâce au théorème de transfert, on peut considérer l'intégrale $f(1)=\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt$ comme l'espérance de la variable aléatoire $V=\ln(1+U^2)$, où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
On obtient une valeur approchée de l'espérance de V en calculant la moyenne empirique $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k$, où $(V_1,\ldots,V_n)$ est un échantillon de la loi de V et où n est assez grand. On peut donc proposer (ici avec $n=100000$) :

```
U=grand(1,100 000,'unf',0,1)
V=log(1+U.^2)
f=mean(V)
disp(f)
```

Partie 2

7) a) Avec la convention $x^0=1$, on a $u_0=\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^0 dt=\int_0^1 1\,dt=1$ donc la valeur donnée à u_0 est cohérente avec l'expression générale de u_n.

b) On a $u_1=\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^1 dt=\int_0^1 \ln(1+t^2)^1\,dt=f(1)$.

8) a) Calculons : $u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} dt-\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n} dt$.
Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \left(\left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1}-\left(\ln(1+t^2)\right)^{n}\right)dt$$

En factorisant :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n}\left(\ln(1+t^2)-1\right)dt$$

Comme $0\le t^2\le 1$, on a $1\le 1+t^2\le 2$ donc $0\le \ln(1+t^2)\le \ln 2$.

On a donc $\left(\ln(1+t^2)\right)^n\ge 0$ et $\ln(1+t^2)-1\le \ln 2-1<0$ (car $\ln 2\approx 0,7$).
On en déduit que $u_{n+1}-u_n$ est l'intégrale, bornes dans l'ordre croisant, d'une fonction négative, ce qui prouve que : $u_{n+1}-u_n\le 0$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

b) On a $\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n \geq 0$ et $u_n = \int_0^1 \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n dt$ donc u_n est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction positive, ce qui prouve que : $u_n \geq 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc elle converge.

9) a) On a $0 \leq \ln\left(1+t^2\right) \leq \ln 2$ (déjà vu avant) et, en élevant à la puissance n-ième (tout est positif et la fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$), on obtient :

$$0 \leq \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n \leq (\ln 2)^n$$

En intégrant de 0 à 1 (bornes dans l'ordre croissant), on a :

$$0 \leq \int_0^1 \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n dt \leq \int_0^1 (\ln 2)^n dt$$

Conclusion:

$$\boxed{0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n}$$

b) Comme $\ln 2 \in]-1,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln 2)^n = 0$ donc, par encadrement, on trouve :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Comme $\ln 2 \in]-1,1[$, la série de terme général $(\ln 2)^n$ est convergente en tant que série géométrique dont la raison appartient à $]-1,1[$. Le critère de comparaison pour les séries à termes positifs assure que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge}}$$

10) a) On a vu que : $\ln\left(1+t^2\right) \leq \ln 2$ donc $1-\ln\left(1+t^2\right) \geq 1-\ln 2$. Comme tout est strictement positif, on peut inverser : $0 < \dfrac{1}{1-\ln\left(1+t^2\right)} \leq \dfrac{1}{1-\ln 2}$.

En multipliant par $\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n \geq 0$, on a : $0 \leq \dfrac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} \leq \dfrac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln 2}$.

En intégrant de 0 à 1 (bornes dans l'ordre croissant), on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt \leq \frac{1}{1-\ln 2} \int_0^1 \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n dt$$

Conclusion :

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt \leq \frac{u_n}{1-\ln 2}}$$

b) Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt = 0}$$

c) Comme $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^k dt$, on a, par linéarité de l'intégration :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^k dt$$

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\ln\left(1+t^2\right)$ différente de 1 et on trouve bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt}$$

d) Par linéarité de l'intégration, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt = 0$, le membre de droite a une limite finie donc le membre de gauche aussi, et après passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt}$$

e) Il faut cette fois trouver une valeur approchée de l'espérance de la variable $W = \frac{1}{1-\ln\left(1+U^2\right)}$, où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$. On peut alors proposer :

```
U=grand(1,100 000,'unf',0,1)
W=(1-log(1+U.^2)).^-1
S=mean(W)
disp(S)
```