Corrigé

Exercice 1

1) La fonction f est une fonction polynomiale de deux variables donc elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) Les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont : $\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y \\ \partial_2(f)(x,y) = 4y^3 + 4x - 4y \end{cases}$.

b) Le gradient de f est nul si, et seulement si : $\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire,

si et seulement si : $\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$.

En simplifiant par 4, on obtient :

$$\boxed{\nabla(f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}}$$

c) Pour résoudre ce système, on peut ajouter les deux lignes $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et on obtient : $\nabla(f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases}$. La deuxième équation s'écrit $y^3 = -x^3$ que l'on peut aussi écrire (par imparité de la fonction "cube") $y^3 = (-x)^3$.

Comme la fonction "cube" est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi : $y^3 = (-x)^3 \Leftrightarrow y = -x$.

En remplaçant dans le système, on a :

$$\nabla(f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2) = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

On a donc : $\nabla(f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$.

Les points critiques de f étant les points en lesquels le gradient s'annule, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Les points critiques de } f \text{ sont : } (0,0),\ \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)}$$

3) a) Les dérivées partielles d'ordre 2 de *f* sont : $\begin{cases} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 12x^2 - 4 \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 4 \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 4 \\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 12y^2 - 4 \end{cases}$.

b) • La matrice hessienne de *f* en $(0,0)$ est :

$$H_{0,0} = \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(0,0) & \partial^2_{1,2}(f)(0,0) \\ \partial^2_{2,1}(f)(0,0) & \partial^2_{2,2}(f)(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

• De même, la matrice hessienne de *f* en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est :

$$H_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} = \nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

• Et enfin, la matrice hessienne de *f* en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est :

$$H_{-\sqrt{2},\sqrt{2}} = \nabla^2(f)(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

c) • Les valeurs propres de $H_{0,0}$ sont les réels λ pour lesquels le déterminant de $H_{0,0} - \lambda I$ est nul. Comme $H_{0,0} - \lambda I = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}$, les valeurs propres de $H_{0,0}$ sont les réels λ solutions de $(-4-\lambda)^2 - 16 = 0$, c'est-à-dire de $(4+\lambda)^2 - 16 = 0$ ou encore $\lambda^2 + 8\lambda = 0$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } H_{0,0} \text{ sont : 0 et –8}}$$

• Les valeurs propres de $H_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ sont les réels λ pour lesquels le déterminant de $H_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} - \lambda I$ est nul. Comme $H_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} - \lambda I = \begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}$, les valeurs propres de $H_{0,0}$ sont les réels λ solutions de $(20-\lambda)^2 - 16 = 0$, c'est-à-dire de $(20-\lambda)^2 = 16$, soit encore $20 - \lambda = 4$ ou $20 - \lambda = -4$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } H_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} \text{ sont : 16 et 24}}$$

• Comme $H_{-\sqrt{2},\sqrt{2}} = H_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$, on peut tout de suite écrire :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } H_{-\sqrt{2},\sqrt{2}} \text{ sont : 16 et 24}}$$

Les valeurs propres de $H_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ et $H_{-\sqrt{2},\sqrt{2}}$ sont strictement positives donc *f* admet un minimum local en les points critiques $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, puisque l'on travaille sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

On a $f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^4+\left(-\sqrt{2}\right)^4-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2=4+4-16=-8$ et on a aussi $f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^4+\left(\sqrt{2}\right)^4-2\left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2=4+4-16=-8$.

$$\boxed{\text{Le minimum local en } \left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \text{ est égal à } -8}$$

d) On a :

$f(x,x)=x^4+x^4-2(x-x)^2=2x^4$

$f(x,-x)=x^4+(-x)^4-2(x+x)^2=x^4+x^4-8x^2=2x^4-8x^2=2x^2\left(x^2-4\right)$

Au voisinage de $x=0$, on a $x^2-4<0$ donc $f(x,-x)<0$, alors que $f(x,x)\geq 0$.

On en déduit que *f* change de signe "aux alentours" de $(0,0)$, ce qui prouve que :

$$\boxed{f \text{ n'a pas d'extremum en } (0,0)}$$

4) a) En posant $g(x,y)=f(x,y)-\left(x^2-2\right)^2-\left(y^2-2\right)^2-2(x+y)^2$, on a :

$g(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2-\left(x^2-2\right)^2-\left(y^2-2\right)^2-2(x+y)^2$

En développant, on trouve :

$$g(x,y)=x^4+y^4-2\left(x^2-2xy+y^2\right)$$
$$-\left(x^4-4x^2+4\right)-\left(y^4-4y^2+4\right)-2\left(x^2+2xy+y^2\right)$$

En enlevant les parenthèses, il reste :

$$g(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2-x^4+4x^2-4-y^4+4y^2-4-2x^2-4xy-2y^2$$

Après simplification, on obtient :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=-8}$$

b) D'après la question précédente, on a :

$$f(x,y)=\left(x^2-2\right)^2+\left(y^2-2\right)^2+2(x+y)^2-8$$

Comme $\left(x^2-2\right)^2+\left(y^2-2\right)^2+2(x+y)^2\geq 0$ (somme de carrés), cette inégalité prouve que, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a $f(x,y)\geq -8$, avec égalité si (x,y) est un des points $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ qui sont les seuls à annuler à la fois $\left(x^2-2\right)^2$, $\left(y^2-2\right)^2$ et $(x+y)^2$.

On peut conclure :

$$\boxed{-8 \text{ est un minimum global de } f}$$

5) a) On peut proposer :

```
function z=f(x,y)
z=x^4+y^4-2*(x-y)^2
endfunction
```

b) • La première des trois nappes montre que la fonction associée possède un minimum global atteint en deux endroits (il n'est pas facile de distinguer les coordonnées !).

• La deuxième nappe montre que la fonction associée possède un seul minimum global (et rien d'autre).

• La troisième nappe est celle d'une fonction n'ayant pas d'extremum (ni minimum, ni maximum).

Conclusion :

$$\boxed{\text{La nappe N°1 est celle représentant la fonction } f}$$

Exercice 2

1) a) Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(\varphi(P+\lambda Q)\big)(x) = \int_0^1 (P+\lambda Q)(x+t)\,dt$.

Par définition de l'addition des fonctions et du produit d'une fonction par un réel, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(\varphi(P+\lambda Q)\big)(x) = \int_0^1 \big(P(x+t)+\lambda Q(x+t)\big)\,dt$.

Par linéarité de l'intégration, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\varphi(P+\lambda Q)\big)(x) = \int_0^1 P(x+t)\,dt + \lambda \int_0^1 Q(x+t)\,dt$$

On a donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(\varphi(P+\lambda Q)\big)(x) = \big(\varphi(P)\big)(x) + \lambda\big(\varphi(Q)\big)(x) = \big(\varphi(P)+\lambda\varphi(Q)\big)(x)$

Ceci prouve, par définition de l'égalité de deux fonctions, que :

$$\varphi(P+\lambda Q) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$$

Conclusion : φ est linéaire.

b) • On a : $\big(\varphi(e_0)\big)(x) = \int_0^1 1\,dt = 1$.

• On a : $\big(\varphi(e_1)\big)(x) = \int_0^1 (x+t)\,dt = \left[\frac{1}{2}(x+t)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} + x$.

• En utilisant la formule $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, on a :

$$\big(\varphi(e_2)\big)(x) = \int_0^1 (x+t)^2\,dt = \left[\frac{1}{3}(x+t)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3} + x + x^2.$$

On trouve ainsi (voir aide à la résolution) :

$$\boxed{\varphi(e_0) = e_0. \qquad \varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1. \qquad \varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2}$$

c) Comme φ est linéaire, il reste à montrer que l'image d'un polynôme de E est encore un polynôme de E.

Tout polynôme P de E peut s'écrire : $P = ae_0 + be_1 + ce_2$, où a, b et c sont des réels.

On a alors, par linéarité de φ :

$$\varphi(P)=a\varphi(e_0)+b\varphi(e_1)+c\varphi(e_2)$$

En remplaçant grâce à la question précédente, on trouve :

$$\varphi(P)=ae_0+b\left(\frac{1}{2}e_0+e_1\right)+c\left(\frac{1}{3}e_0+e_1+e_2\right)=\left(a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\right)e_0+(b+c)e_1+ce_2$$

Ceci montre que $\varphi(P)$ est combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.

Par conséquent, $\varphi(P)$ appartient à E.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$$

2) a) Par définition de la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2), on a :

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

b) Pour trouver $\text{Ker}(\varphi)$, on résout $AX=0$, avec $X=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$.

On obtient : $AX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c=0\\ b+c=0\\ c=0\end{cases}$.

On a donc $c=0$, puis on en déduit, dans l'ordre, $b=0$ et enfin $a=0$.

On a donc :

$$AX=0 \Leftrightarrow X=0$$

Ceci prouve que $\text{Ker}(\varphi)=\{0\}$.

Par conséquent, φ est injectif, et comme l'espace vectoriel E est de dimension finie, on peut affirmer que φ est bijectif, ce qui se traduit par :

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } E}$$

c) La matrice A est triangulaire donc on voit sa seule valeur propre (donc la seule valeur propre de φ) sur sa diagonale : c'est $\lambda=1$.

On peut raisonner de deux façons :

• Par l'absurde. Si A était diagonalisable, il existerait une matrice D diagonale (avec des 1 sur la diagonale, on aurait donc $D=I$) et une matrice P inversible telles que : $A=PDP^{-1}=PIP^{-1}=PP^{-1}=I$. Ceci est manifestement faux donc A n'est pas diagonalisable et φ non plus.

• En cherchant le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=1$.

On résout $AX = X$, avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et on trouve :

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c = a \\ b+c = b \\ c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c = 0 \\ c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

On a donc $X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que le sous-espace propre cherché est de dimension $1 < 3$, ce qui ne suffit pas pour rendre A (ou φ) diagonalisable.

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

3) On a tout ce qu'il faut pour écrire les deux commandes complètes :

```
A=[1,1/2,1/3 ; 0,1,1 ; 0,0,1]
disp(A^n)
```

4) a) • $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc en posant $u_0 = 0$ on a bien $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Si l'on suppose que, pour un certain entier naturel *n*, il existe un réel u_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors on a :

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}+\frac{n}{2} & \frac{1}{3}+\frac{n}{2}+u_n \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3}$, on trouve bien :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)/2 & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Conclusion : par récurrence, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel n, on ait : $A^n=\begin{pmatrix}1 & n/2 & u_n\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, cette suite étant définie par $u_0=0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=u_n+\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{3}$.

b) D'après ce qui précède, on a : $\forall k\in\mathbb{N},\ u_{k+1}-u_k=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{3}$. Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}k+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}1=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}1$.
Par "télescopage" dans la somme du membre de gauche et en remplaçant les sommes connues dans le membre de droite, on obtient :
$u_n-u_0=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(n-1)n}{2}+\dfrac{1}{3}\times n=\dfrac{n(n-1)}{4}+\dfrac{n}{3}=\dfrac{3n(n-1)+4n}{12}=\dfrac{n(3(n-1)+4)}{12}$.
Comme $u_0=0$, il reste : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{n(3n+1)}{12}$.
Cette égalité étant valable pour $n=0$ (elle donne bien $u_0=0$), on peut résumer :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{n(3n+1)}{12}}$$

c) On remplace :

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix}1 & n/2 & \dfrac{n(3n+1)}{12}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

Exercice 3 ....

1) a) Tout d'abord, on peut remarquer que, comme $V(\Omega)=\mathbb{R}_+^*$, on a $W(\Omega)=\mathbb{R}$.
On a alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_W(x)=P(W\le x)=P(-\ln V\le x)=P(\ln V\ge -x)$. Comme la fonction exponentielle est une *bijection* croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$P(\ln V\ge -x)=P(V\ge e^{-x})$$

L'inclusion $(\ln V\ge -x)\subset(V\ge e^{-x})$ est assurée par la croissance de la fonction exponentielle et l'inclusion inverse est assurée par la croissance de la fonction logarithme népérien (ce qui explique la présence du mot *bijection*).
Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_W(x)=P(V\ge e^{-x})=1-F_V(e^{-x})$.

Comme $e^{-x} > 0$, on trouve en remplaçant : $F_W(x) = 1 - \left(1 - e^{-e^{-x}}\right)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = e^{-e^{-x}}}$$

b) La fonction F_W est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (elle est donc, a fortiori, continue sur sur $\mathbb{R}$) donc :

$$\boxed{W \text{ est une variable à densité}}$$

2) a) Dire que la variable prenant la plus grande des valeurs prises par $X_1, \ldots, X_n$ (il s'agit de Y_n) prend une valeur inférieure ou égale à *x*, c'est dire que chacune des variables $X_1, \ldots, X_n$ a pris une valeur inférieure ou égale à *x* (sinon, Y_n ne serait pas inférieure ou égal à *x*). On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]\right)$$

Comme X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes, on obtient :

$$F_{Y_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x)$$

Les variables X_k suivent la même loi que *V* donc : $F_{Y_n}(x) = \left(F_V(x)\right)^n$.

Pour finir, on sait que $F_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$ donc $F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \left(1 - e^{-x}\right)^n \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

Pour finir, on peut écrire, pour respecter la demande de l'énoncé :

$$\boxed{F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \left(1 - e^{-x}\right)^n \text{ si } x \geq 0 \end{cases}}$$

b) On dérive F_{Y_n} sauf en 0, ce qui donne : $F_{Y_n}{}'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ n\,e^{-x}\left(1 - e^{-x}\right)^{n-1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

En posant, par exemple, $f_{Y_n}(0) = 0$, on obtient une densité f_{Y_n} de Y_n définie par :

$$\boxed{f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ n\,e^{-x}\left(1 - e^{-x}\right)^{n-1} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}}$$

3) a) Pour tout *t* strictement positif, on a : $1 - F_{Y_n}(t) = 1 - \left(1 - e^{-t}\right)^n$.

Or, lorsque *t* est au voisinage de $+\infty$, $-e^{-t}$ est au voisinage de 0 donc on peut utiliser l'équivalent : $(1+u)^n - 1 \underset{0}{\sim} nu$, avec ici $u = -e^{-t}$. On peut alors écrire $1 - F_{Y_n}(t) = -\left(\left(1 - e^{-t}\right)^n - 1\right)$ et on obtient : $1 - F_{Y_n}(t) \underset{+\infty}{\sim} -n\left(-e^{-t}\right)$.

En simplifiant :

$$\boxed{1-F_{Y_n}(t) \underset{+\infty}{\sim} n\,e^{-t}}$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} ne^{-t}\,dt$ est convergente (elle est de même nature que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ qui converge et vaut 1, en tant qu'intégrale de densité d'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1), le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives permet de conclure que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt \text{ est convergente}}$$

b) On effectue une intégration par parties dans $\int_0^x \left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt$ en posant : $u'(t)=1$ et $v(t)=1-F_{Y_n}(t)$. On a alors $v'(t)=-f_{Y_n}(t)$ et on peut choisir $u(t)=t$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0,x]$, pour tout x positif ou nul, ce qui rend l'intégration par parties licite et donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x \left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt = \left[t\left(1-F_{Y_n}(t)\right)\right]_0^x + \int_0^x t\,f_{Y_n}(t)\,dt$$

En 0, le crochet s'annule et il reste :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x \left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt = x\left(1-F_{Y_n}(x)\right) + \int_0^x t\,f_{Y_n}(t)\,dt}$$

c) On a $x\left(1-F_{Y_n}(x)\right) \underset{+\infty}{\sim} nxe^{-x}$ et comme, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\left(1-F_{Y_n}(x)\right)=0}$$

d) L'intégrale $\int_0^x \left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et cette limite est $\int_0^{+\infty} \left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt$. De plus, on vient de voir que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-F_{Y_n}(x)\right)=0$ donc, avec l'égalité obtenue à la question 3b), on est sûr que l'intégrale $\int_0^x t\,f_{Y_n}(t)\,dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ (par différence), ce qui signifie que $\int_0^{+\infty} t\,f_{Y_n}(t)\,dt$ est convergente (absolument car les fonctions sont positives), c'est-à-dire que Y_n possède une espérance (car $\int_{-\infty}^0 t\,f_{Y_n}(t)\,dt=0$).

Après passage à la limite dans l'égalité obtenue à la question 3b), on trouve :

$$\boxed{E(Y_n)=\int_0^{+\infty}\left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt}$$

4) a) La fonction $t\mapsto 1-e^{-t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[0,x]$, par conséquent, le changement de variable $u=1-e^{-t}$ est licite.
On obtient alors : $1-F_{Y_n}(t)=1-\left(1-e^{-t}\right)^n=1-u^n$ et on a $du=e^{-t}\,dt=(1-u)dt$, d'où $dt=\dfrac{1}{1-u}du$. Finalement :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^x\left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt=\int_0^{1-e^{-x}}\frac{1-u^n}{1-u}du}$$

b) Comme u est différent de 1 ($0\le u\le 1-e^{-x}$), on a : $\dfrac{1-u^n}{1-u}=\sum_{j=0}^{n-1}u^j$. En remplaçant dans l'intégrale ci-dessus, on trouve :

$$\int_0^x\left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt=\int_0^{1-e^{-x}}\left(\sum_{j=0}^{n-1}u^j\right)du$$

Par linéarité de l'intégration, on en déduit :

$$\int_0^x\left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^{1-e^{-x}}u^j\,du=\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{u^{j+1}}{j+1}\right]_0^{1-e^{-x}}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(1-e^{-x}\right)^{j+1}}{j+1}$$

Avec le changement d'indice $k=j+1$, on a bien :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^x\left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-e^{-x}\right)^k}{k}}$$

Comme $E(Y_n)=\int_0^{+\infty}\left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt$, il faut chercher la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\left(1-e^{-x}\right)^k}{k}$.
Comme cette somme est finie, son nombre de termes ne dépendant pas de x, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\left(1-e^{-x}\right)^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité $\int_0^x\left(1-F_{Y_n}(t)\right)dt=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\left(1-e^{-x}\right)^k}{k}$, on a :

$$\boxed{E(Y_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

5) a) Avec le rappel fait, il n'y a pas trop de mystère : la deuxième ligne permet de simuler n variables indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1 donc il suffit de prendre le max de ces n variables et d'enlever $\ln n$ pour simuler Z_n. On a donc :

```
function Z=f(n)
x = grand(1,n,'unf',0,1)
Z =max(x)-log(n)
endfunction
```

b) Comme les histogrammes se ressemblent pour une grande valeur de *n*, on peut penser que, si *n* est assez grand, la loi de Z_n est "proche" de la loi de *W*. Plus précisément :

- La hauteur du premier rectangle de l'histogramme (1) donne une valeur approchée de $F_W(1)$, la hauteur du premier rectangle de l'histogramme (2) donne une valeur approchée de $F_{Z_n}(1)$. On en déduit (ça se voit) $F_W(1) \approx F_{Z_n}(1)$.
- La hauteur du deuxième rectangle de l'histogramme (1) donne une valeur approchée de $F_W(2) - F_W(1)$, la hauteur du deuxième rectangle de l'histogramme (2) donne une valeur approchée de $F_{Z_n}(2) - F_{Z_n}(1)$. On en déduit $F_W(2) \approx F_{Z_n}(2)$.
- Et ainsi de suite.

On peut donc conjecturer que la suite (Z_n) converge en loi vers *W*.

6) a) Pour tout réel *x*, on a :

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n \le x) = P(Y_n - \ln n \le x) = P(Y_n \le x + \ln n)$$

Conclusion :

$$\boxed{F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)}$$

b) On peut remarquer au préalable que $Z_n(\Omega) = [-\ln n, +\infty[$, ce qui peut éviter de se tromper un peu plus loin.

Comme $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)$ et comme $F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ (1 - e^{-y})^n \text{ si } y \ge 0 \end{cases}$, il suffit de remplacer *y* par $x + \ln n$, les conditions sur *y* devenant $x + \ln n < 0$ et $x + \ln n \ge 0$, c'est-à-dire $x < -\ln n$ et $x \ge -\ln n$, ce qui confirme que $Z_n(\Omega) = [-\ln n, +\infty[$.

On a donc : $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -\ln n \\ \left(1 - e^{-(x+\ln n)}\right)^n \text{ si } x \ge -\ln n \end{cases}$.

Comme $e^{-(x+\ln n)} = e^{-x}e^{-\ln n} = e^{-x}\dfrac{1}{e^{\ln n}} = \dfrac{e^{-x}}{n}$, on peut simplifier, ce qui donne :

$$\boxed{F_{Z_n}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<-\ln n\\ \left(1-\dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n \text{ si } x\geq -\ln n\end{cases}}$$

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{n}=0$, on peut utiliser l'équivalent classique $\ln(1+u)\underset{0}{\sim}u$, ce qui implique (pour n assez grand afin que $1-\dfrac{e^{-x}}{n}>0$) : $\ln\left(1-\dfrac{e^{-x}}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\dfrac{e^{-x}}{n}$.
En multipliant par n, on obtient :

$$n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-e^{-x}$$

Comme deux équivalents ont même limite, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)=-e^{-x}}$$

d) • Pour un réel x fixé, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}-\ln n=-\infty$, alors on a, pour tout entier naturel n assez grand ($n>e^{-x}$), on a $x\geq -\ln n$, ce qui justifie de prendre :

$$F_{Z_n}(x)=\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n$$

On peut alors écrire $F_{Z_n}(x)=\exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{e^{-x}}{n}\right)\right)$. Comme d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1-\dfrac{e^{-x}}{n}\right)=-e^{-x}$ et comme, d'autre part, la fonction exponentielle est continue en $-e^{-x}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n=e^{-e^{-x}}$, soit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}F_{Z_n}(x)=e^{-e^{-x}}=F_W(x)$$

On vient de montrer que :

$$\boxed{(Z_n)\text{ converge en loi vers } W}$$

Problème ....

Partie 1

1) Étant sur le sommet 1 à l'instant 0, le mobile sera de façon équiprobable sur l'un des trois sommets 2, 3 ou 4 à l'instant 1. Par conséquent, on a :

$$\boxed{\forall k\in[\![2,4]\!],\ P(X_1=k)=\frac{1}{3}}$$

On en déduit : $E(X_1)=2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{1}{3}$, d'où :

$$\boxed{E(X_1)=3}$$

Remarque. On pouvait éviter ce calcul car X_1 suit la loi uniforme sur $[\![2,4]\!]$.

2) À l'instant 1, on a trois options :

• Le mobile est sur le sommet 2 et à l'instant 2, il peut aller sur l'un des sommets 1, 3 ou 4.

• Le mobile est sur le sommet 3 et à l'instant 2, il peut aller sur l'un des sommets 1, 2 ou 4.

• Le mobile est sur le sommet 4 et à l'instant 2, il peut aller sur l'un des sommets 1, 2 ou 3.

On a donc $X_2(\Omega)=[\![1,4]\!]$.

Le même processus se reproduit ensuite : à partir de l'instant 2, le mobile peut se trouver sur n'importe quel sommet. On a donc :

$$\boxed{\forall n\geq 2,\ X_n(\Omega)=[\![1,4]\!]}$$

3) a) Pour *n* supérieur ou égal à 2, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X_n=k)_{k\in[\![1,4]\!]}$, chacun étant de probabilité non nulle, s'écrit :

$$P(X_{n+1}=1)=\sum_{i=1}^{4}P(X_n=i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=1)$$

D'après les conditions du voyage, le mobile se dirige vers un *autre sommet* que celui où il se trouve, et ceci de façon équiprobable donc on a :

$$P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=1)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} \text{ si } 2\leq i\leq 4\\ 0 \text{ si } i=1\end{cases}$$

Il reste alors $P(X_{n+1}=1)=\sum_{i=2}^{4}P(X_n=i)\times\frac{1}{3}$, ce qui s'écrit :

$$\boxed{P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}\big(P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\big)}$$

b) • Pour $n=0$, l'égalité précédente est correcte puisqu'elle fournit :

$$P(X_1=1)=\frac{1}{3}\big(P(X_0=2)+P(X_0=3)+P(X_0=4)\big)=\frac{1}{3}(0+0+0)=0.$$

• Pour $n=1$, l'égalité précédente est correcte puisqu'elle fournit :

$$P(X_2=1)=\frac{1}{3}\big(P(X_1=2)+P(X_1=3)+P(X_1=4)\big)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

c) • Pour $n\geq 2$, la famille $(X_n=k)_{k\in[\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements donc : $P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1$.

• Pour $n=1$, on a $P(X_1=1)=0 \quad P(X_1=2)=P(X_1=3)=P(X_1=4)=\frac{1}{3}$

donc on a encore $P(X_1=1)+P(X_1=2)+P(X_1=3)+P(X_1=4)=1$

• Pour $n=0$, on a $P(X_0=1)=1$, $P(X_0=2)=P(X_0=3)=P(X_0=4)=0$

donc on a encore $P(X_1=1)+P(X_1=2)+P(X_1=3)+P(X_1=4)=1$.

Dans tous les cas, on a bien :

$$\boxed{P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1}$$

On en déduit que $P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1-P(X_n=1)$, et en remplaçant dans l'égalité de la question 3a) donnant $P(X_{n+1}=1)$, on obtient :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}\left(1-P(X_n=1)\right)$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P(X_{n+1}=1)=-\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{3}}$$

d) On reconnaît que la suite $\left(P(X_n=1)\right)_{n\geq 2}$ est arithmético-géométrique.

Soit donc x le réel vérifiant l'égalité $x=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$: on a $x=\frac{1}{4}$. On pose $v_n=P(X_n=1)-\frac{1}{4}$ et on trouve alors :

$v_{n+1}=P(X_{n+1}=1)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{12}$

Mais $P(X_n=1)=v_n+\frac{1}{4}$ donc : $v_{n+1}=-\frac{1}{3}\left(v_n+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{12}=-\frac{1}{3}v_n$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géometrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=P(X_0=1)-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, ce qui implique, d'après le cours :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme $P(X_n=1)=v_n+\frac{1}{4}$, on en déduit :

$$\boxed{\forall n\geq 2,\ P(X_n=1)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Remarque. On pouvait aussi soustraire membre à membre les deux égalités

$$\begin{cases} P(X_{n+1}=1) = -\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{3} \\ x \qquad\qquad = -\frac{1}{3}x \qquad\qquad +\frac{1}{3} \end{cases}$$

On obtenait alors : $P(X_{n+1}=1)-x=-\frac{1}{3}\left(P(X_n=1)-x\right)$, c'est-à-dire $v_{n+1}=-\frac{1}{3}v_n$ puis on terminait de la même manière.

4) a) C'est le même plan qu'à la question 3). Pour n supérieur ou égal à 2, la formule des probabilités totales associée au même système complet d'événements, s'écrit :

$$P(X_{n+1}=2)=\sum_{i=1}^{4}P(X_n=i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=2)$$

D'après les conditions du voyage, on a $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=2)=\begin{cases}\frac{1}{3} \text{ si } i\in\{1,3,4\} \\ 0 \text{ si } i=2\end{cases}$ et il reste : $\forall n\geq 2$, $P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{3}\left(P(X_n=1)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\right)$.

On vérifie que cette égalité reste valable pour $n=0$ et $n=1$, ce qui prouve que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{3}\left(P(X_n=1)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\right)$$

b) Pour $n\geq 2$, toujours avec le système complet d'événements $(X_n=k)_{k\in[\![1,4]\!]}$, on peut cette fois écrire que $P(X_n=1)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1-P(X_n=2)$, et en remplaçant dans $P(X_{n+1}=2)$, on obtient : $P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{3}\left(1-P(X_n=2)\right)$.

On a donc :

$$\boxed{\forall n\geq 2,\ P(X_{n+1}=2)=-\frac{1}{3}P(X_n=2)+\frac{1}{3}}$$

On vérifie aussi que cette égalité reste valable pour $n=0$ et $n=1$, ce qui donne :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P(X_{n+1}=2)=-\frac{1}{3}P(X_n=2)+\frac{1}{3}}$$

c) On reconnaît que la suite $\left(P(X_n=2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique mais cette fois, la suite $\left(P(X_n=2)-\frac{1}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $P(X_0=2)-\frac{1}{4}=0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$, ce qui implique :

$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 2) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

On trouve donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

5) En admettant que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait $P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}$ et $P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$, alors les suites $(P(X_n = 3))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P(X_n = 4))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence liant deux termes consécutifs que la suite $(P(X_n = 2))_{n\in\mathbb{N}}$, et ont le même premier terme, à savoir :

$$P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0 = P(X_0 = 2)$$

Par conséquent, ces trois suites sont égales, ce qui justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6) La variable X_n est finie donc elle possède une espérance et celle-ci est :

$E(X_n) = 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) + 3 \times P(X_n = 3) + 4 \times P(X_n = 4)$.

$E(X_n) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

$E(X_n) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{2}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{4}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

$E(X_n) = \frac{10}{4} - \frac{6}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Bilan :

$$\boxed{E(X_n) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Partie 2

7) a) Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$U_n A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effectuant ce produit matriciel, on obtient une matrice ligne dont :

- Le 1[er] élément est $\frac{1}{3}\left(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$.
- Le 2[ème] élément est $\frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$.

• Le $3^{\text{ème}}$ élément est $\frac{1}{3}\Big(P\big(X_n=1\big)+P\big(X_n=2\big)+P\big(X_n=4\big)\Big)$.

• Le $4^{\text{ème}}$ élément est $\frac{1}{3}\Big(P\big(X_n=1\big)+P\big(X_n=2\big)+P\big(X_n=3\big)\Big)$.

D'après les questions 3a), et 4a), les deux premiers éléments sont $P\big(X_{n+1}=1\big)$ et $P\big(X_{n+1}=2\big)$. Sans refaire les calculs faits aux questions 3a) et 4a), on constate que les deux éléments suivants sont $P\big(X_{n+1}=3\big)$ et $P\big(X_{n+1}=4\big)$. On a donc :

$$U_n A=\Big(P\big(X_{n+1}=1\big)\;\; P\big(X_{n+1}=2\big)\;\; P\big(X_{n+1}=3\big)\;\; P\big(X_{n+1}=4\big)\Big)=U_{n+1}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\; U_{n+1}=U_n A}$$

b) • Pour $n=0$, on a : $U_0A^0=U_0I=U_0$.

• Si l'on suppose, pour un certain entier naturel *n*, que $U_n=U_0A^n$, alors on a : $U_{n+1}=U_nA=\big(U_0A^n\big)A=U_0A^{n+1}$.

• On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\; U_n=U_0A^n}$$

c) On connaît U_n et on a $U_0=(1\;\;0\;\;0\;\;0)$, puisque X_0 est la variable certaine égale à 1 (le mobile est sur le sommet 1 au départ), donc en notant $A^n=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4\end{pmatrix}$, l'égalité $U_n=U_0A^n$ s'écrit :

$$\Big(P\big(X_n=1\big)\;\; P\big(X_n=2\big)\;\; P\big(X_n=3\big)\;\; P\big(X_n=4\big)\Big)=(1\;\;0\;\;0\;\;0)\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4\end{pmatrix}$$

On en déduit par produit :

$P\big(X_n=1\big)=a_1 \qquad P\big(X_n=2\big)=a_2 \qquad P\big(X_n=3\big)=a_3 \qquad P\big(X_n=4\big)=a_4$

La première ligne (a_1,a_2,a_3,a_4) de A^n est donc :

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\right)$$

8) En plaçant le mobile au départ sur le sommet 2, on a $U_0=(0\;\;1\;\;0\;\;0)$ et des calculs similaires à ceux faits aux questions 3) et 4) donnent cette fois :

$P(X_n=1)=P(X_n=3)=P(X_n=4)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n$ et $P(X_n=2)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n$

Comme on a :

$$\big(P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\ \ P(X_n=4)\big)=(0\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

On en déduit par produit :

$P(X_n=1)=b_1 \qquad P(X_n=2)=b_2 \qquad P(X_n=3)=b_3 \qquad P(X_n=4)=b_4$

La deuxième ligne de A^n est donc :

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

On trouve la troisième ligne de A^n en plaçant le mobile au départ sur le sommet 3, ce qui donne :

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

On trouve la quatrième ligne de A^n en plaçant le mobile au départ sur le sommet 4, ce qui donne :

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Partie 3

9) On a $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Conclusion :

$$\boxed{A=-\frac{1}{3}I+\frac{1}{3}J}$$

10) a) On a $J^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}=4J$.

Procédons par récurrence.

• Pour $n=1$, on a $4^{1-1}J=4^0J=J$

• Supposons, pour un certain entier naturel k non nul, que $J^k=4^{k-1}J$, alors on a :

$J^{k+1}=J^k\times J=\left(4^{k-1}J\right)J=4^{k-1}J^2=4^{k-1}\times 4J=4^kJ$

b) Comme les matrices I et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton, qui s'écrit, pour tout entier naturel n :

$$A^n=\left(\frac{1}{3}(J-I)\right)^n=\frac{1}{3^n}(J-I)^n=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-I)^{n-k}J^k=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}J^k$$

Pour n supérieur ou égal à 1, on isole le premier terme, car la relation $J^k=4^{k-1}J$ n'est valable que pour $k\geq 1$. On a alors :

$$A^n=\frac{1}{3^n}\left(\ (-1)^n J^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}J^k\ \right)=\frac{1}{3^n}\left(\ (-1)^n I+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k-1}J\ \right)$$

En mettant $\frac{1}{4}$ en facteur, on trouve : $A^n=\frac{1}{3^n}\left(\ (-1)^n I+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^kJ\ \right)$

On ajoute le terme d'indice 0 à la somme puis on l'enlève :

$$A^n=\frac{1}{3^n}\left((-1)^n I+\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(-1)^{n-k}-(-1)^n\right)J\right)$$

On peut maintenant appliquer de nouveau la formule du binôme :

$$A^n=\frac{1}{3^n}\left((-1)^n I+\frac{1}{4}\left((4-1)^n-(-1)^n\right)J\right)$$

On trouve alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=\frac{1}{3^n}\left((-1)^n I+\frac{1}{4}[3^n-(-1)^n]J\right)$

Finalement :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n I+\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]J}$$

c) Pour $n=0$, cette relation reste valable puisqu'elle donne :

$$A^0=\left(-\frac{1}{3}\right)^0 I+\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^0\right]J=I+0\times J=I$$

Partie 4

11) a) Pour la première ligne, on déclare la matrice `A`, puis, pour la troisième ligne, on ajoute les valeurs de `x` égales à 1, ce qui donne le nombre de retours du mobile sur le sommet 1 au cours de ses 100 premiers déplacements.

```
A=[0,1,1,1;1,0,1,1;1,1,0,1;1,1,1,0]/3
x=grand(100,'markov',A,1)
n=sum(x==1)
disp(x)
disp(n)
```

b) Sur 100 déplacements, le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet numéroté 1 est toujours à peu près égal à 25, ce qui peut vouloir dire que la probabilité pour que le mobile se trouve sur le sommet 1 est égale à $\frac{1}{4}$.

Effectivement, on a $P(X_k=1)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$, ce qui est très proche de $\frac{1}{4}$ dès que k est supérieur ou égal à 4 (voir la rubrique « conseils de méthode »).