

Corrigé 2016

Exercice 1

$$1) A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit : } A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On voit que : $A^2 = 4A - 4I$.

Un polynôme annulateur de A est donc : $X^2 - 4X + 4$

2) a) Comme $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$, la seule racine du polynôme $X^2 - 4X + 4$ est 2, qui est donc la seule valeur propre possible de A .

Il reste à vérifier que 2 est effectivement valeur propre de A . Il suffit donc de vérifier que, $A - 2I$ n'est pas inversible.

$$\text{On a } A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on voit que cette matrice a deux colonnes égales (et}$$

même trois colonnes proportionnelles), ce qui prouve que $A - 2I$ n'est pas inversible.

Bilan :

La seule valeur propre de A (donc aussi de f) est 2

b) Comme A n'a que la valeur propre 2, si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $2I$ et il existerait une matrice P inversible telle que :

$$A = P(2I)P^{-1} = 2PIP^{-1} = 2PP^{-1} = 2I$$

Comme la matrice A n'est pas égale à la matrice $2I$, on peut conclure :

A n'est pas diagonalisable

Comme 0 n'est pas valeur propre de A , on sait que :

A est inversible

$$3) \text{ On pose } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et on résout le système } AX = 2X.$$

$$\text{On trouve } AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2x + 2z = 2y \\ x - y + 3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + z = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + z = y$$

Remarque. On aurait pu directement résoudre $(A - 2I)X = 0$ avec la matrice $A - 2I$ explicitée précédemment.

$$\text{On obtient donc : } X = \begin{pmatrix} x \\ x + z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Comme f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 , le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2 est $\text{Vect}((1,1,0), (0,1,1))$.

En posant $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (0,1,1)$, la famille (u_1, u_2) est génératrice du seul sous-espace propre de f mais comme u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, la famille (u_1, u_2) est libre et c'est ainsi une base du sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2.

4) a) Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Soit trois réels a, b et c tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. Comme $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$, on a $u_3 = (1,1,1)$ et cette relation s'écrit : $a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,1,1) = (0,0,0)$.

$$\text{On en déduit } (a + c, a + b + c, b + c) = (0,0,0) \text{ qui donne : } \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ce système équivaut à } \begin{cases} a = -c \\ -c - c + c = 0 \\ b = -c \end{cases} \text{ et il reste : } \begin{cases} a = -c \\ -c = 0 \\ b = -c \end{cases}. \text{ On a donc :}$$

$$a = b = c = 0.$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est libre et elle contient trois vecteurs de l'espace \mathbb{R}^3 qui est de dimension 3 donc :

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

b) On sait déjà que $f(u_1) = 2u_1$ et $f(u_2) = 2u_2$ donc il reste à déterminer $f(u_3)$.

Comme $f(u_3) = f(e_1 + e_2 + e_3)$, on fait le calcul $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui donnera les

coordonnées de $f(u_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) . On a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On peut écrire ce qui précède sous la forme :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut conclure : $f(u_3) = u_1 + u_2 + 2u_3$

Remarque. On pouvait "tricher" un peu puisque l'énoncé indique que les éléments diagonaux de la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) sont tous égaux à 2 donc on est certain que $f(u_3)$ s'écrit $\alpha u_1 + \beta u_2 + 2u_3$. Ensuite, on trouve α et β par identification.

La matrice T de f dans la base \mathcal{B}' est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) En posant $T = 2I + N$, on a $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme la matrice I commute

avec toutes les matrices, la matrice $2I$ aussi, et on peut utiliser la formule du

binôme de Newton. De plus, on a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on

en déduit, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 :

$$\boxed{N^k = N^2 N^{k-2} = 0 N^{k-2} = 0}$$

On a donc, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$T^n = (2I + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I)^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} I N^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k.$$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, seuls les deux premiers termes subsistent (les autres sont nuls ou absents d'après l'encadré précédent) et on a :

$$T^n = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k = \binom{n}{0} 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} N = 2^n I + n 2^{n-1} N$$

Comme $N = T - 2I$, on obtient :

$$T^n = 2^n I + n2^{n-1}(T - 2I) = 2^n I + n2^{n-1}T - n2^n I$$

En arrangeant, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = n2^{n-1}T - (n-1)2^n I$$

On vérifie que cette égalité reste vraie pour $n = 0$ (elle donne bien $T^0 = I$).

5) a) Comme T est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) , on en déduit (passerelle matrice-endomorphisme) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = n2^{n-1}f - (n-1)2^n Id$$

Pour finir, comme A est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) , on en déduit (on prend la même passerelle dans l'autre sens) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I$$

b) D'après la question 1), on a : $A^2 = 4A - 4I$ (ce qui est corroboré par la formule de la question 5a) ci-dessus). On peut écrire cette égalité sous la forme :

$$4A - A^2 = 4I$$

En mettant A en facteur, on obtient $A(4I - A) = 4I$, puis en divisant par 4, on a :

$$A\left(I - \frac{1}{4}A\right) = I$$

Ceci prouve que A est inversible (on le savait déjà) mais surtout que :

$$A^{-1} = I - \frac{1}{4}A$$

c) Si on remplace n par -1 dans l'égalité obtenue à la question 5a), on trouve :

$$A^{-1} = (-1)2^{-1-1}A - (-1-1)2^{-1}I = -\frac{1}{4}A + 2 \times \frac{1}{2}I = -\frac{1}{4}A + I, \text{ ce qui est correct}$$

d'après la question 5b).

En conclusion :

$$\boxed{\text{La formule trouvée à la question 5a) reste valable pour } n = -1}$$

Exercice 2.....

1) a) La fonction $h : t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur \mathbb{R} , donc sur $[n, +\infty[$. Comme f_n est une primitive de h sur $[n, +\infty[$, f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[n, +\infty[$, on a : $f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$.

On conclut que :

$$f_n \text{ est strictement croissante sur } [n, +\infty[$$

b) Pour tout $t \geq n$, on a : $e^{\sqrt{t}} \geq e^{\sqrt{n}}$ (car la fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}_+ et la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R}). Ainsi, en intégrant bornes dans l'ordre croissant (avec $x \geq n$), on trouve :

$$\forall x \geq n, f_n(x) \geq (x-n) e^{\sqrt{n}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-n) e^{\sqrt{n}} = +\infty$, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

c) La fonction f_n est continue sur $[n, +\infty[$ (elle est même de classe C^1) et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $[n, +\infty[$ sur $[f_n(n), +\infty[$, c'est-à-dire de $[n, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Par suite, comme 1 appartient à $[0, +\infty[$, l'équation " $f_n(x) = 1$ " a une seule solution, notée u_n , élément de $[n, +\infty[$.

2) a) $u_n \in [n, +\infty[$ donc $u_n \geq n$.

On a donc, par minoration :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

b) Pour tout t de $[n, u_n]$, on a : $e^{\sqrt{n}} \leq e^{\sqrt{t}} \leq e^{\sqrt{u_n}}$ (la fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}_+ et la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R}).

En intégrant ces fonctions continues sur $[n, u_n]$, les bornes étant dans l'ordre croissant, on obtient : $(u_n - n) e^{\sqrt{n}} \leq f_n(u_n) \leq (u_n - n) e^{\sqrt{u_n}}$, mais, en remarquant que $f_n(u_n) = 1$, on a en fait :

$$(u_n - n) e^{\sqrt{n}} \leq 1 \leq (u_n - n) e^{\sqrt{u_n}}$$

En multipliant l'inégalité de gauche par $e^{-\sqrt{n}} > 0$, on obtient : $u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.

En multipliant l'inégalité de droite par $e^{-\sqrt{u_n}} > 0$, on obtient : $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n$.

En regroupant ces deux derniers résultats, on a enfin :

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$$

3) a) Grâce à la question précédente, il suffit de déterminer la valeur de n pour laquelle on a $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$.

Les commandes Scilab complétées sont donc :

```
n = 0
while exp(-sqrt(n)) > 0.0001
n = n+1
end
disp(n)
```

b) En résolvant l'inéquation $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$, on obtient :

$$e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow -\sqrt{n} \leq \ln(10^{-4}) \Leftrightarrow -\sqrt{n} \leq -4\ln 10 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 4\ln 10.$$

$$e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow n \geq 16(\ln 10)^2.$$

Comme $\ln 10 \approx 2,3$, on a $(\ln 10)^2 \approx 5,29$, puis $16(\ln 10)^2 \approx 16 \times 5,29 > 16 \times 5 = 80$.

La valeur cherchée est donc :

$$n = 85$$

4) a) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{u_n}} = 0$. D'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$, donc, grâce au théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement obtenu à la question 2b), on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n) = 0$, ce qui s'écrit encore :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

b) Pour tout réel x , on a : $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4}$. Comme $\frac{x^2}{4} \geq 0$, on en déduit :

$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$. Comme on prend $x \geq -1$, on a $x+1 \geq 0$ et par croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}_+ , on obtient :

$$\forall x \geq -1, \sqrt{1+x} \leq \left|1 + \frac{x}{2}\right|$$

Pour finir, $1 + \frac{x}{2}$ étant positif, on a :

$$\forall x \geq -1, \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

c) Comme $u_n = n + v_n$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-\sqrt{u_n}} = e^{-\sqrt{n+v_n}} = e^{-\sqrt{n\left(1+\frac{v_n}{n}\right)}} = \exp\left(-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}}\right)$$

On peut appliquer l'inégalité obtenue au début de cette question avec $x = \frac{v_n}{n}$ qui

est positif (donc supérieur ou égal à -1), et on trouve : $\sqrt{1 + \frac{v_n}{n}} \leq 1 + \frac{v_n}{2n}$.

En multipliant par $-\sqrt{n}$ qui est négatif, on obtient : $-\sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{v_n}{n}} \geq -\sqrt{n}\left(1 + \frac{v_n}{2n}\right)$.

Par croissance de la fonction exponentielle, on a enfin :

$$\exp\left(-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}}\right) \geq \exp\left(-\sqrt{n}\left(1+\frac{v_n}{2n}\right)\right)$$

En développant dans l'exponentielle de droite et en se souvenant que $e^{-\sqrt{u_n}} = \exp\left(-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}}\right)$, on trouve : $e^{-\sqrt{u_n}} \geq \exp\left(-\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)}$$

d) Grâce à cette minoration de $e^{-\sqrt{u_n}}$, l'encadrement de la question 2b) peut se prolonger et on obtient : $e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.

Après division par $e^{-\sqrt{n}} > 0$, on a : $\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \frac{u_n - n}{\sqrt{n}} \leq 1$.

Sans aucune indétermination, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-v_n}{2\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) = 1$, et grâce au théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - n}{\sqrt{n}} = 1$$

Ceci démontre que :

$$\boxed{u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}}$$

Exercice 3.....

1) a) D'après le cours, on a :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{x+3}{4} & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et } F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

b) Avec la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $((Z=1), (Z=-1))$, on obtient successivement, pour tout réel x :

$$P(X \leq x) = P([X \leq x] \cap [Z=1]) + P([X \leq x] \cap [Z=-1])$$

$$P(X \leq x) = P([U \leq x] \cap [Z=1]) + P([V \leq x] \cap [Z=-1])$$

Comme Z est indépendante de U et V , on peut écrire :

$$P(X \leq x) = P(U \leq x)P(Z=1) + P(V \leq x)P(Z=-1)$$

Par définition, on a $P(U \leq x) = F_U(x)$ et $P(V \leq x) = F_V(x)$, de plus, on sait que

$P(Z=1) = p$, $P(Z=-1) = 1-p$, donc finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = p F_U(x) + (1-p) F_V(x)$$

b) En passant en revue les 5 cas indiqués par l'énoncé, afin de remplacer les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$, on trouve :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{p(x+3)}{4} & \text{si } -3 \leq x \leq -1 \\ \frac{x+2p+1}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{(1-p)x+3p+1}{4} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

c) La fonction F_X est de classe C^1 sur les intervalles $]-\infty, -3[$, $]-3, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$ soit comme fonction constante, soit comme fonction polynomiale. En dérivant sur ces intervalles, on obtient :

$$F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{p}{4} & \text{si } -3 < x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{1-p}{4} & \text{si } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

On obtient une densité f_X de la variable aléatoire X en posant, par exemple :

$$f_X(-3) = \frac{p}{4}, f_X(-1) = \frac{1}{4}, f_X(1) = \frac{1-p}{4} \text{ et } f_X(3) = 0$$

Conclusion :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{p}{4} & \text{si } -3 \leq x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{1-p}{4} & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) La restriction de la fonction $t \mapsto t f_X(t)$ à l'intervalle $[-3, -1[$ a une limite finie en -1 (elle vaut $-\frac{p}{4}$) donc l'intégrale $\int_{-3}^{-1} t f_X(t) dt$ existe.

Pour la même raison, les intégrales $\int_{-1}^1 t f_X(t) dt$, $\int_1^3 t f_X(t) dt$ existent aussi.

Comme les intégrales $\int_{-\infty}^{-3} t f_X(t) dt$ et $\int_3^{+\infty} t f_X(t) dt$ sont nulles (car f est nulle sur ces deux intervalles), on est certain que X admet une espérance et on a :

$$E(X) = \int_{-3}^{-1} t f_X(t) dt + \int_{-1}^1 t f_X(t) dt + \int_1^3 t f_X(t) dt .$$

$$E(X) = \int_{-3}^{-1} t \frac{p}{4} dt + \int_{-1}^1 t \frac{1}{4} dt + \int_1^3 t \frac{1-p}{4} dt .$$

$$E(X) = \frac{p}{4} \int_{-3}^{-1} t dt + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 t dt + \frac{1-p}{4} \int_1^3 t dt \quad (\text{par linéarité de l'intégration}).$$

$$E(X) = \frac{p}{4} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 + \frac{1-p}{4} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^3 .$$

$$E(X) = \frac{p}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1-p}{4} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) .$$

$$E(X) = -p + 1 - p .$$

On trouve enfin :

$$\boxed{E(X) = 1 - 2p}$$

De la même façon, X admet un moment d'ordre 2 et on a :

$$E(X^2) = \int_{-3}^{-1} t^2 f_X(t) dt + \int_{-1}^1 t^2 f_X(t) dt + \int_1^3 t^2 f_X(t) dt$$

$$E(X^2) = \int_{-3}^{-1} t^2 \frac{p}{4} dt + \int_{-1}^1 t^2 \frac{1}{4} dt + \int_1^3 t^2 \frac{1-p}{4} dt$$

$$E(X^2) = \frac{p}{4} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{1-p}{4} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^3 .$$

$$E(X^2) = \frac{p}{4} \left(-\frac{1}{3} - \frac{-27}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{-1}{3} \right) + \frac{1-p}{4} \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right) .$$

$$E(X^2) = \frac{p}{4} \times \frac{26}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1-p}{4} \times \frac{26}{3} .$$

$$E(X^2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{26}{3} = \frac{7}{3} .$$

On trouve alors la variance de X avec la formule de Koëning-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 .$$

Conclusion :

$$\boxed{V(X) = \frac{7}{3} - (1 - 2p)^2 = 4 \left(\frac{1}{3} + p - p^2 \right)}$$

3) a) • Lorsque Z prend la valeur 1, on a $U \frac{1+Z}{2} + V \frac{1-Z}{2} = U$.

• Lorsque Z prend la valeur -1 , on a $U \frac{1+Z}{2} + V \frac{1-Z}{2} = V$.

On retrouve bien la définition de X donnée par l'énoncé.

Conclusion :

$$X = U \frac{1+Z}{2} + V \frac{1-Z}{2}$$

b) Comme U et Z ont une espérance, alors par indépendance de U et Z , les variables U et $\frac{1+Z}{2}$ sont indépendantes et comme elles possèdent une espérance, la variable $U \frac{1+Z}{2}$ possède aussi une espérance. De même, la variable $V \frac{1-Z}{2}$ possède aussi une espérance.

Tout ceci montre que X possède une espérance et, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(X) = E\left(U \frac{1+Z}{2}\right) + E\left(V \frac{1-Z}{2}\right).$$

Toujours par indépendance, on obtient :

$$E(X) = E(U) E\left(\frac{1+Z}{2}\right) + E(V) E\left(\frac{1-Z}{2}\right)$$

Et encore avec la linéarité de l'espérance, on a :

$$E(X) = E(U) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} E(Z)\right) + E(V) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} E(Z)\right)$$

Or $E(Z) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1) = 2p - 1$, $E(U) = -1$ et $E(V) = 1$ donc :

$$E(X) = -\frac{1}{2} - \frac{2p-1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2p-1}{2}$$

On retrouve bien :

$$E(X) = 1 - 2p$$

c) Avec l'égalité $X = U \frac{1+Z}{2} + V \frac{1-Z}{2}$, on trouve :

$$X^2 = U^2 \frac{(1+Z)^2}{4} + 2UV \frac{(1+Z)(1-Z)}{4} + V^2 \frac{(1-Z)^2}{4}$$

Avec les trois célèbres identités remarquables, on a :

$$X^2 = U^2 \frac{1+2Z+Z^2}{4} + 2UV \frac{1-Z^2}{4} + V^2 \frac{1-2Z+Z^2}{4}$$

Comme $Z^2 = 1$, il reste :

$$X^2 = U^2 \frac{1+Z}{2} + V^2 \frac{1-Z}{2}$$

On montre que $E(X^2)$ existe avec les mêmes arguments que ceux utilisés pour $E(X)$ et, toujours par indépendance, on obtient :

$$E(X^2) = \frac{1}{2} E(U^2) E(1+Z) + \frac{1}{2} E(V^2) E(1-Z)$$

Or on a :

$$E(U^2) = V(U) + (E(U))^2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}.$$

$$E(V^2) = V(V) + (E(V))^2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}.$$

$$E(1+Z) = 1 + E(Z) = 1 + (2p-1) = 2p.$$

$$E(1-Z) = 1 - E(Z) = 1 - (2p-1) = 2(1-p).$$

$$\text{Finalement : } E(X^2) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} \times 2p + \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} \times 2(1-p) = \frac{7}{3}p + \frac{7}{3}(1-p) = \frac{7}{3}.$$

Cette valeur est bien celle qui a été trouvée à la question 2d).

4) a) • Comme $T(\Omega) = \{0,1\}$, on a $(2T-1)(\Omega) = \{-1,1\}$.

$$\bullet P(2T-1=-1) = P(2T=0) = P(T=0) = 1-p.$$

$$\bullet P(2T-1=1) = P(2T=2) = P(T=1) = p$$

On conclut :

$$2T-1 \text{ a même loi que } Z$$

b) Comme U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, alors on simule U avec la commande $U = \text{grand}(1, 1, 'unf', -3, 1)$ et comme V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$, alors on simule V avec la commande $V = \text{grand}(1, 1, 'unf', -1, 3)$.

Pour finir, on utilise la relation $X = U \frac{1+Z}{2} + V \frac{1-Z}{2}$. En récapitulant toutes les

commandes, on obtient :

$$U = \text{grand}(1, 1, 'unf', -3, 1)$$

$$V = \text{grand}(1, 1, 'unf', -1, 3)$$

$$Z = 2 * \text{grand}(1, 1, 'bin', 1, p) - 1$$

$$X = U * (1+Z) / 2 + V * (1-Z) / 2$$

Problème

Partie 1 préliminaires.

1) a) Comme x appartient à $[0, 1[$, alors, pour tout t de $[0, x]$, on a $t \neq 1$, d'où :

$$\sum_{p=1}^n t^{p-1} = \sum_{q=0}^{n-1} t^q = \frac{1-t^n}{1-t}$$

b) En intégrant entre 0 et x (les fonctions sont continues sur $[0, x]$), on obtient, par linéarité de l'intégration : $\int_0^x \sum_{p=1}^n t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$, puis, toujours

par linéarité de l'intégration : $\sum_{p=1}^n \int_0^x t^{p-1} dt = -\ln|1-x| - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$, ce qui s'écrit (comme $x < 1$) :

$$\forall x \in [0, 1[, \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

c) Pour tout t de $[0, x]$, on a successivement : $0 \leq t \leq x$, $-x \leq -t \leq 0$, $1-x \leq 1-t \leq 1$. Comme $1-x > 0$ et comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, 1]$, on obtient : $\frac{1}{1-x} \geq \frac{1}{1-t} \geq 1$. En multipliant les trois membres par $t^n \geq 0$ et en intégrant ces fonctions continues entre 0 et x (bornes dans l'ordre croissant), on trouve : $\frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt \geq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \geq \int_0^x t^n dt$, ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \geq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \geq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et, comme $x \in [0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$.

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que :

$$\forall x \in [0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

d) D'après l'égalité obtenue à la question 1b), on est sûr que $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p}$ a une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui signifie que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente, avec, de plus, après passage à la limite :

$$\forall x \in [0, 1[, \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$$

2) Procédons par récurrence.

Pour tout entier naturel $q \geq m$, on note $R(q) : \sum_{k=m}^q \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$.

• $R(m)$ est vraie. En effet, $\sum_{k=m}^m \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$.

• Supposons $R(q)$ vraie pour un entier naturel q fixé, supérieur ou égal à m .

On a alors : $\sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^q \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m}$.

D'où : $\sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} = \binom{q+2}{m+1}$ (grâce à la formule du triangle de Pascal).

Ainsi $R(q+1)$ est vraie.

• Par récurrence, pour tout couple (m, q) d'entiers naturels tels que $m \leq q$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=m}^q \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}}$$

3) a) Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et par mutuelle indépendance des variables X_1, X_2, \dots, X_n , on en déduit :

$$\boxed{S_n(\Omega) = \llbracket n, +\infty \rrbracket}$$

Pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$P(S_{n+1} = k) = P(S_n + X_{n+1} = k) = \sum_{\substack{j \in S_n(\Omega) \\ k-j \in X_{n+1}(\Omega)}} P((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j)).$$

$$\text{On a : } \begin{cases} j \in S_n(\Omega) \\ k-j \in X_{n+1}(\Omega) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j \geq n \\ k-j \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j \geq n \\ j \leq k-1 \end{cases}.$$

$$\text{On obtient : } P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} P((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j)).$$

Comme X_{n+1} est indépendante de X_1, X_2, \dots, X_n , alors X_{n+1} et S_n sont indépendantes, et on obtient :

$$\boxed{P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} P(S_n = j)P(X_{n+1} = k-j)}$$

b) Posons, pour tout n de \mathbb{N}^* , $R(n) : " \forall k \geq n, P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n} "$.

• On a $S_1 = X_1$ et, pour tout k de \mathbb{N}^* :

$$P(X_1 = k) = x(1-x)^{k-1} = \binom{k-1}{0} x^1 (1-x)^{k-1}$$

La propriété $R(1)$ est donc vraie.

• Soit n un entier naturel non nul tel que $R(n)$ est vraie.

Pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a, d'après ce qui précède :

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} P(S_n = j)P(X_{n+1} = k-j) = \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^n (1-x)^{j-n} (1-x)^{k-j-1} x.$$

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^{n+1} (1-x)^{k-n-1} = x^{n+1} (1-x)^{k-n-1} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1}.$$

Grâce à la formule montrée à la question 2), on a : $\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} = \sum_{j=n-1}^{k-2} \binom{j}{n-1} = \binom{k-1}{n}$.

On en conclut : $P(S_{n+1} = k) = \binom{k-1}{n} x^{n+1} (1-x)^{k-(n+1)}$. La propriété $R(n+1)$ est donc vraie.

• Finalement, par récurrence, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall k \geq n, P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}$$

c) Comme le support de la variable S_n est $\llbracket n, +\infty \llbracket$, on en déduit, d'après la définition d'une variable aléatoire : $\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k) = 1$.

On a donc $\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n} = 1$ et on en déduit :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

d) Pour trouver S_n , on doit faire la somme de n variables indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p donc les commandes complétées sont :

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 : ')
S = sum(grand(1, n, 'geom', p))
disp(S)
```

Partie 2

1) a) Comme p appartient à $]0,1[$, q est également dans $]0,1[$ donc positif et comme $\ln p$ est strictement négatif, u_k est bien défini et positif.

b) La série de terme général u_k est convergente d'après la partie 1 et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\frac{1}{\ln p} \times (-\ln(1-q))$$

Comme $1-q = p$, on obtient bien :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$$

2) a) Pour tout k de \mathbb{N}^* , on a : $kP(X = k) = -\frac{q^k}{\ln p}$. Comme la série de terme général q^k est absolument convergente (car $|q| < 1$), X a une espérance et :

$E(X) = -\frac{1}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = -\frac{1}{\ln p} \times \frac{q}{1-q}$. En simplifiant, on trouve :

$$E(X) = \frac{-q}{p \ln p}$$

b) De même, pour tout k de \mathbb{N}^* , on a : $k^2 P(X = k) = -\frac{kq^k}{\ln p} = -\frac{q}{\ln p} \times kq^{k-1}$.

Comme la série de terme général kq^{k-1} est absolument convergente (série géométrique "dérivée" avec $|q| < 1$), X a un moment d'ordre 2 et :

$$E(X^2) = -\frac{q}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = -\frac{q}{\ln p} \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{-q}{p^2 \ln p}$$

Grâce au théorème de Koenig-Huygens, on obtient :

$$V(X) = \frac{-q}{p^2 \ln p} - \left(\frac{-q}{p \ln p} \right)^2 = \frac{-q}{p^2 \ln p} + \frac{q^2}{p^2 (\ln p)^2} = \frac{-q \ln p + q^2}{p^2 (\ln p)^2}$$

En définitive :

$$V(X) = \frac{-q(q + \ln p)}{(p \ln p)^2}$$

3) a) • Si X prend la valeur k , alors Y prend toutes les valeurs entières entre 0 et k , et comme k parcourt \mathbb{N}^* , on conclut :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

• La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements de probabilités non nulles $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ s'écrit :

$$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P_{(X=k)}(Y = 0) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k \ln p} \times q^k = -\frac{1}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(q^2)^k}{k}$$

D'après la question 1) de la première partie ($q^2 \in [0, 1[$), on obtient :

$$P(Y = 0) = -\frac{1}{\ln p} \times (-\ln(1 - q^2)) = \frac{\ln(1 - q^2)}{\ln p}$$

Comme $\ln(1 - q^2) = \ln(1 - q) + \ln(1 + q) = \ln p + \ln(1 + q)$, on trouve finalement :

$$P(Y = 0) = 1 + \frac{\ln(1 + q)}{\ln p}$$

b) On a : $\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{1}{k} \times \frac{k!}{n!(k-n)!}$ et, comme $k \geq 1$, on peut simplifier par k , ce qui

donne : $\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{(k-1)!}{n!(k-n)!}$. Ensuite, comme $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = \frac{1}{n} \times \binom{k-1}{n-1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a successivement, toujours grâce à la formule des probabilités totales :

$$P(Y = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P_{(X=k)}(Y = n) = - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{q^k}{k \ln p} \times \binom{k}{n} p^n q^{k-n}$$

$$P(Y = n) = - \frac{1}{\ln p} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \frac{p^n q^{2k-n}}{k} = - \frac{p^n q^n}{\ln p} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \frac{(q^2)^{k-n}}{k}.$$

Comme $\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, on obtient :

$$\boxed{P(Y = n) = - \frac{p^n q^n}{n \ln p} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n}}$$

D'après la question 3) de la première partie, avec $x = 1 - q^2$ qui est bien dans $]0,1[$, on trouve :

$$P(Y = n) = - \frac{p^n q^n}{n \ln p} \times \frac{1}{(1 - q^2)^n}$$

Avec $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$, on a enfin :

$$\boxed{P(Y = n) = - \frac{q^n}{n(1 + q)^n \ln p}}$$

c) Grâce aux questions 2a) et 2b), on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = 1 + \frac{\ln(1 + q)}{\ln p} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n(1 + q)^n \ln p} = 1 + \frac{\ln(1 + q)}{\ln p} - \frac{1}{\ln p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{q}{1 + q}\right)^n}{n}$$

Comme $\frac{q}{1 + q}$ appartient à $]0,1[$, la question 1) du préliminaire s'applique et on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = 1 + \frac{\ln(1 + q)}{\ln p} - \frac{1}{\ln p} \times \left(- \ln \left(1 - \frac{q}{1 + q} \right) \right) = 1 + \frac{\ln(1 + q)}{\ln p} - \frac{\ln(1 + q)}{\ln p}.$$

Bilan :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = 1}$$

d) Pour tout entier naturel n non nul, on a : $nP(Y = n) = -\frac{1}{\ln p} \left(\frac{q}{1+q} \right)^n$.

La série de terme général $\left(\frac{q}{1+q} \right)^n$ est une série géométrique absolument convergente donc Y a une espérance et :

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y = n) = -\frac{1}{\ln p} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{1+q} \right)^n = -\frac{1}{\ln p} \times \frac{q}{1+q} \times \frac{1}{1 - \frac{q}{1+q}}$$

En simplifiant, on trouve :

$$E(Y) = -\frac{q}{\ln p}$$

e) De même, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$n^2 P(Y = n) = -\frac{1}{\ln p} \times n \left(\frac{q}{1+q} \right)^n = -\frac{1}{\ln p} \times \frac{q}{1+q} \times n \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$$

La série de terme général $n \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$ est une série géométrique (dérivée) absolument convergente donc Y a un moment d'ordre 2 et :

$$E(Y^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(Y = n) = -\frac{1}{\ln p} \times \frac{q}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$$

$$E(Y^2) = -\frac{1}{\ln p} \times \frac{q}{1+q} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{q}{1+q} \right)^2}$$

En simplifiant, on trouve :

$$E(Y^2) = -\frac{1}{\ln p} \times \frac{q}{1+q} \times (1+q)^2 = \frac{-q(1+q)}{\ln p}$$

Grâce au théorème de Koenig-Huygens, on obtient :

$$V(Y) = \frac{-q(1+q)}{\ln p} - \left(\frac{q}{\ln p} \right)^2 = \frac{-q(1+q)\ln p - q^2}{(\ln p)^2}$$

Après mise en facteur de $-q$, on a :

$$V(Y) = \frac{-q(q + (1+q)\ln p)}{(\ln p)^2}$$