

Corrigé

Exercice 1

1) a) Comme $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base de \mathbb{R}^5 , on sait d'après le cours que :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5))$$

Comme de plus, on a $f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = f(e_5)$, il reste :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

En remplaçant $f(e_1)$ et $f(e_2)$ par leurs expressions, on obtient :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_5)$$

De plus, les vecteurs $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = (1, 1, 1, 1, 1)$ et $e_1 + e_5 = (1, 0, 0, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires donc la famille $(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_5)$ est libre et c'est une base de $\text{Im}(f)$.

$$\boxed{\dim \text{Im}(f) = 2}$$

Pour finir, on a $e_2 + e_3 + e_4 = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) - (e_1 + e_5)$ donc, comme $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel, $e_2 + e_3 + e_4$ appartient à $\text{Im}(f)$.

Les vecteurs $e_2 + e_3 + e_4 = (0, 1, 1, 1, 0)$ et $e_1 + e_5 = (1, 0, 0, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires donc la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une famille libre de deux vecteurs de $\text{Im}(f)$, et comme $\dim \text{Im}(f) = 2$, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

On peut conclure :

$$\boxed{(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5) \text{ est une base de } \text{Im}(f)}$$

b) Grâce au théorème du rang, comme $\dim \text{Im}(f) = 2$, on a : $\dim \text{Ker}(f) = 3$.

On a remarqué plus haut que $f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = f(e_5)$, ce qui montre que :

$$f(e_2) - f(e_3) = 0, f(e_2) - f(e_4) = 0 \text{ et } f(e_2) - f(e_5) = 0$$

Par linéarité de f , on a donc : $f(e_2 - e_3) = 0$, $f(e_2 - e_4) = 0$ et $f(e_2 - e_5) = 0$, ce qui prouve que $e_2 - e_3$, $e_2 - e_4$ et $e_2 - e_5$ sont trois vecteurs de $\text{Ker}(f)$. Il reste à vérifier qu'ils forment une famille libre. Soit donc trois réels a , b et c tels que :

$$a(e_2 - e_3) + b(e_2 - e_4) + c(e_2 - e_5) = 0$$

Cette égalité s'écrit : $(a + b + c)e_2 - ae_3 - be_4 - ce_5 = 0$ et comme la famille (e_2, e_3, e_4, e_5) est une famille libre en tant que sous famille de la base

$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, on obtient :
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}, \text{ ce qui prouve la liberté de la famille}$$

$(e_2 - e_3, e_2 - e_4, e_2 - e_5)$.

Conclusion :

$(e_2 - e_3, e_2 - e_4, e_2 - e_5)$ est une base de $\text{Ker}(f)$

Remarque. On pouvait aussi rechercher $\text{Ker}(f)$ en résolvant le système $CX = 0$.

2) a) Avec $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$, on a, par linéarité de f :

- $f(u) = f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 3f(e_2) = 3e_1 + 3e_5$.
- $f(v) = f(e_1) + f(e_5) = 3f(e_2) = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) + (e_1 + e_5)$
 $f(v) = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5$.

Toujours par linéarité de f , on en déduit :

- $f(u - v) = f(u) - f(v) = 3e_1 + 3e_5 - (2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5)$.
 $f(u - v) = e_1 + e_5 - e_2 - e_3 - e_4 = v - u = -1(u - v)$.
- $f(u + 3v) = f(u) + 3f(v) = 3e_1 + 3e_5 + 3(2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5)$.
 $f(u + 3v) = 9(e_1 + e_5) + 3(e_2 + e_3 + e_4) = 9v + 3u = 3(u + 3v)$.

b) Les égalités ci-dessus prouvent que -1 et 3 sont des valeurs propres de f associées à des sous-espaces propres de dimensions au moins égales à 1 (car $u - v$ et $u + 3v$ ne sont pas nuls).

Comme 0 est valeur propre de f associé au sous-espace propre $\text{Ker}(f)$ qui est de dimension 3, on est certain que -1 et 3 sont des valeurs propres de f associées à des sous-espaces propres de dimensions exactement égales à 1 (puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas excéder la dimension de l'espace vectoriel \mathbb{R}^5).

Par conséquent, les valeurs propres de f sont -1 , 0 et 3 et, en notant $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ , on a :

$$\begin{aligned} E_{-1}(f) &= \text{Vect}(u - v) \\ E_0(f) &= \text{Vect}(e_2 - e_3, e_2 - e_4, e_2 - e_5) \\ E_3(f) &= \text{Vect}(u + 3v) \end{aligned}$$

c) La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de \mathbb{R}^5 donc f est diagonalisable, ce qui prouve que C est aussi diagonalisable.

D'après la question 2b), et grâce à la formule de changement de base, on a

$$C = RDR^{-1}, \quad \text{avec par exemple,} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{où les colonnes de } R \text{ sont, de gauche à droite, les}$$

coordonnées des vecteurs de base de $E_{-1}(f)$, $E_0(f)$ et $E_3(f)$ dans la base \mathcal{B} .

3) a) Un calcul simple donne :

$$D(D+I)(D-3I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(D+I)(D-3I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On conclut :

$$\boxed{D(D+I)(D-3I) = 0}$$

b) On a $D(D+I)(D-3I) = 0$, ce qui s'écrit en développant : $D^3 - 2D^2 - 3D = 0$. Par conséquent, le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de D donc aussi de f et de C .

4) a) Les racines de P sont 0, -1 et 3 et, en donnant successivement à X ces trois

$$\text{valeurs, on obtient : } \begin{cases} c_n = 0 \quad (\text{car } n \geq 1) \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \end{cases}$$

En remplaçant c_n par 0, on trouve alors :
$$\begin{cases} c_n = 0 \\ a_n - b_n = (-1)^n \\ 9a_n + 3b_n = 3^n \end{cases}$$
. Ce système équivaut,

après la transformation $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$, à :
$$\begin{cases} c_n = 0 \\ a_n - b_n = (-1)^n \\ 12a_n = 3^n + 3(-1)^n \end{cases}$$
. On a donc :

$$\begin{cases} c_n = 0 \\ b_n = a_n - (-1)^n \\ 12a_n = 3^n + 3(-1)^n \end{cases}$$

Finalement :

$$a_n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{12}, \quad b_n = \frac{3^n - 9(-1)^n}{12} \quad \text{et} \quad c_n = 0$$

b) En appliquant la relation $X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$ à la matrice C , on obtient :

$$C^n = (C^3 - 2C^2 - 3C)Q_n(C) + a_nC^2 + b_nC + c_nI$$

Comme $C^3 - 2C^2 - 3C = 0$, on obtient, en remplaçant a_n , b_n et c_n par leur expression :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C^n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{12}C^2 + \frac{3^n - 9(-1)^n}{12}C$$

5) La commande `Scilab` proposée donne la première et la dernière ligne de la matrice C donc pour la compléter correctement, il faut donner les 3 lignes manquantes en concaténant une colonne de 3 éléments égaux à 1 et une matrice à 3 lignes et 4 colonnes dont tous les éléments sont nuls. On obtient donc :

$$C = [\text{ones}(1, 5); \text{ones}(3, 1), \text{zeros}(3, 4); \text{ones}(1, 5)]$$

Exercice 2.....

1) a) Comme U prend la plus petite des valeurs prises par X et Y , dire que U prend une valeur strictement supérieure à x , c'est dire que X et Y prennent une valeur strictement supérieure à x . On a donc : $(U > x) = (X > x) \cap (Y > x)$.

Par indépendance de X et Y , on obtient : $P(U > x) = P(X > x)P(Y > x)$

En notant F la fonction de répartition commune à X et Y , on a :

$$P(U > x) = (1 - F(x))^2$$

Il reste à remplacer $F(x)$ par son expression, ce qui donne :

$$P(U > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ (1-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{On en déduit : } F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) • La fonction F_U est continue et de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ puisqu'elle est constante sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ et polynomiale sur $]0, 1[$.

• En 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_U(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_U(x) = F_U(0) = 0$ donc F_U est continue en 0.

• En 1, on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} F_U(x) = F_U(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_U(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$ donc F_U est continue en 1.

Bilan : la fonction F_U est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en 1 donc :

U est une variable à densité

On trouve une densité f_U de U en dérivant F_U , sauf en 0 et en 1 (puisque l'on ne sait pas si F_U est dérivable en ces points) :

$$f_U(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à poser, par exemple, $f_U(0) = 2$ et $f_U(1) = 0$, ce qui donne :

$$f_U(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) La fonction $x \mapsto x f_U(x)$ est nulle ailleurs que sur $[0, 1]$ donc $\int_{-\infty}^0 x f_U(x) dx$ et $\int_1^{+\infty} x f_U(x) dx$ sont nulles. De plus, sa restriction à l'intervalle $[0, 1]$ est continue sur $[0, 1]$ donc U possède une espérance et on a :

$$E(U) = \int_0^1 x f_U(x) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

De même, la fonction $x \mapsto x^2 f_U(x)$ est nulle ailleurs que sur $[0,1]$ et sa restriction à l'intervalle $[0,1]$ est continue sur $[0,1]$ donc U possède un moment d'ordre 2 et on a :

$$E(U^2) = \int_0^1 x^2 f_U(x) dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Pour finir, la variance de U est donnée par :

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

2) a) Le temps total T passé par C dans l'agence bancaire est la somme du temps mis par le plus rapide des deux clients A et B (c'est le temps d'attente de C) et du temps de passage de C au guichet.

On a donc :

$$T = U + Z$$

b) Par linéarité de l'espérance, on a : $E(T) = E(U) + E(Z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$.

$$E(T) = \frac{5}{6}$$

Z est indépendante de X et Y , donc elle est indépendante de U (lemme des coalitions) et on a :

$$V(T) = V(U) + V(Z) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12}$$

$$V(T) = \frac{5}{36}$$

3) a) On peut proposer les commandes suivantes :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
x = grand(1,n,'unf',0,1)
y = grand(1,n,'unf',0,1)
z = grand(1,n,'unf',0,1)
u = min(x,y) ; disp(u, 'u = ')
v = max(x,y) ; disp(v, 'v = ')
t = u+z ; disp(t, 't = ')
```

b) Comme T est le temps total passé par C dans l'agence et comme V est le temps mis par la plus lente des deux personnes A et B , l'événement $(T \geq V)$ s'énonce en français : « le client C sort en dernier de l'agence ».

c) On approche la probabilité de l'événement $(T \geq V)$ par sa fréquence d'apparition lors d'un grand nombre d'épreuves indépendantes (c'est la loi faible des grands nombres qui l'autorise) donc les commandes manquantes sont les suivantes :

$$p = \text{sum}(t \geq v) / n ; \text{disp}(p, 'p = ')$$

d) Il ne semble pas totalement fou de penser que la valeur exacte de p est $\frac{2}{3}$.

Exercice 3.....

1) a) Si l'on considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1, on sait qu'une densité de X est la fonction h définie par :

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \text{ converge et vaut } 1$$

De plus, on sait que X admet une espérance et un moment d'ordre 2 définis par :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \text{ et } E(X^2) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

Comme $E(X) = 1$, on en déduit :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \text{ converge et vaut } 1$$

De plus, on sait que $V(X) = 1$ d'où $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 1 + 1 = 2$ donc :

$$I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \text{ converge et vaut } 2$$

b) Pour tout réel a positif, on a : $I_{k+1}(a) = \int_0^a t^{k+1} e^{-t} dt$.

En posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$, on a $u'(t) = (k+1)t^k$ et on peut choisir $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, a]$ donc l'intégration par parties est licite et donne : $I_{k+1}(a) = [-t^{k+1} e^{-t}]_0^a + (k+1) \int_0^a t^k e^{-t} dt$.

On a donc :

$$I_{k+1}(a) = (k+1) I_k(a) - a^{k+1} e^{-a}$$

c) Avec $k = 2$, on a : $I_3(a) = 3I_2(a) + a^3 e^{-a}$

Par croissances comparées, on a $\lim_{a \rightarrow +\infty} a^3 e^{-a} = 0$ et comme $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_2(a) = I_2$, on peut conclure que I_3 converge et, après passage à la limite, on obtient :

$$I_3 = 3I_2 = 6$$

De même, avec $k = 3$, on a : $I_4(a) = 4I_3(a) + a^4 e^{-a}$.

Par croissances comparées, on a $\lim_{a \rightarrow +\infty} a^4 e^{-a} = 0$ et comme $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_3(a) = I_3$, on peut conclure que I_4 converge.

Après passage à la limite, on obtient :

$$I_4 = 4I_3 = 24$$

2) En développant la fonction intégrée dans l'intégrale proposée on trouve :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (y + xt + t^2)^2 e^{-t} &= (y^2 + x^2 t^2 + t^4 + 2xyt + 2yt^2 + 2xt^3) e^{-t} \\ &= y^2 e^{-t} + 2xyt e^{-t} + (x^2 + 2y)t^2 e^{-t} + 2xt^3 e^{-t} + t^4 e^{-t}. \end{aligned}$$

Comme $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$, $I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$, $I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$, $I_3 = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$ et $I_4 = \int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt$ sont des intégrales convergentes, $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ converge en tant que combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

3) a) D'après ce qui précède, on a :

$$f(x, y) = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-t} dt + 2xy \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt + (x^2 + 2y) \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt + 2x \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt$$

En remplaçant les intégrales I_0 , I_1 , I_2 , I_3 et I_4 par leurs valeurs, on trouve en ordonnant :

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$$

b) La fonction f est polynomiale donc elle est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

4) a) Les points critiques de f sont les couples (x, y) en lesquels le gradient de f s'annule, c'est-à-dire en lesquels les dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent simultanément.

Pour tout couple (x, y) de \mathbb{R}^2 , on a :

$$\partial_1(f)(x, y) = 4x + 2y + 12 \text{ et } \partial_2(f)(x, y) = 2x + 2y + 4$$

Les points critiques de f sont les solutions du système :
$$\begin{cases} 4x + 2y + 12 = 0 \\ 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}.$$

En simplifiant par 2, on obtient :
$$\begin{cases} 2x + y + 6 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Avec la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, ce système équivaut à : $\begin{cases} x+4=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$.

On trouve donc $x = -4$ et ensuite $y = 2$

Conclusion :

Le seul point critique de f est $(-4, 2)$

b) Les dérivées secondes de f en ce point sont :

$$\partial_{1,1}^2(f)(-4,2) = 4, \quad \partial_{1,2}^2(f)(-4,2) = \partial_{2,1}^2(f)(-4,2) = 2 \quad \text{et} \quad \partial_{2,2}^2(f)(-4,2) = 2.$$

La hessienne de f en ce point est $\nabla^2(f)(-4,2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et ses valeurs propres

sont les réels λ pour lesquels la matrice $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Ceci équivaut à $(4-\lambda)(2-\lambda) - 2 \times 2 = 0$, c'est-à-dire : $\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$. Après calcul du discriminant Δ qui vaut 20, on a $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$ et on trouve que les deux valeurs propres de $\nabla^2(f)$ sont : $\lambda_1 = 3 + \sqrt{5}$ et $\lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$.

Les valeurs propres de $\nabla^2(f)$ sont strictement positives (puisque $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$) donc f présente un minimum local au point $(-4, 2)$.

Comme $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$, en notant m ce minimum, on

$$\text{trouve : } m = f(-4, 2) = 2 \times (-4)^2 + 2^2 + 12 \times (-4) + 4 \times 2 + 2 \times (-4) \times 2 + 24.$$

$$m = 32 + 4 - 48 + 8 - 16 + 24 = 4.$$

Conclusion :

$m = 4$

5) a) On a :

$$2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 = 2 \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + 9 + xy + 6x + 3y \right) = 2x^2 + \frac{y^2}{2} + 18 + 2xy + 12x + 6y$$

Par conséquent, on obtient :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 - 18 - 6y - \frac{y^2}{2}$$

$$\text{b) On a : } \frac{1}{2}(y-2)^2 = \frac{1}{2}(y^2 - 4y + 4) = \frac{y^2}{2} - 2y + 2$$

Par conséquent, on obtient :

$$\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4$$

c) On sait depuis la question 2b) que :

$$f(x, y) = 2x^2 + 12xy + 2x + y^2 + 4y + 24$$

De la question 4a), on déduit successivement :

$$f(x, y) = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - 18 - 6y - \frac{y^2}{2} + y^2 + 4y + 24.$$

$$f(x, y) = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 + \frac{y^2}{2} - 2y + 6.$$

Grâce à la question 4b), on a enfin : $f(x, y) = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4$

Comme la somme $2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2$ est positive, on conclut :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq 4$$

Cette relation prouve que 4 est le minimum global de f et on sait, d'après la question 4b), qu'il est atteint au point $(-4, 2)$.

Problème

Partie 1

1) a) Pour tout t de $[0, x]$, on a : $0 \leq t^2 \leq x^2$ (par croissance de la fonction "carré" sur \mathbb{R}_+).

On en déduit $1 - x^2 \leq 1 - t^2 \leq 1$ puis, comme $1 - x^2 > 0$, on a, par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* : $1 \leq \frac{1}{1-t^2} \leq \frac{1}{1-x^2}$. En multipliant par $t^m \geq 0$, on a

$$t^m \leq \frac{t^m}{1-t^2} \leq \frac{t^m}{1-x^2} \text{ et comme } t^m \geq 0, \text{ on peut élargir et écrire : } 0 \leq \frac{t^m}{1-t^2} \leq \frac{t^m}{1-x^2}.$$

En intégrant ces fonctions continues de 0 à x , bornes dans l'ordre croissant, on obtient :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$$

b) On a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m+1} = 0$ donc, par encadrement :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$$

2) a) On a $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \sum_{j=0}^{k-1} (t^2)^j$ et, comme t appartient à $]0, 1[$, alors $t^2 \neq 1$ et on

obtient : $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1 - (t^2)^k}{1 - t^2}$. En arrangeant, ceci s'écrit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}$$

b) En intégrant l'égalité précédente entre 0 et x (les fonctions sont continues sur $[0, x]$ car $1-t^2 \neq 0$), on a : $\int_0^x \sum_{j=1}^k t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2} dt$

Par linéarité de l'intégration, on obtient : $\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$

Finalement :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$$

c) D'après la question 1), avec $m = 2k$, on sait que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt = 0$, ce qui prouve que $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ possède une limite finie égale à $\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$ lorsque k tend vers $+\infty$. En d'autres termes, la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et sa somme est :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$$

d) Pour tout entier naturel k , on a : $\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$.

En remplaçant, on trouve, grâce à la question 2c) :

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \left(\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \right)$$

On peut conclure :

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$$

Partie 2

1) Comme N est la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "pile" lors de lancers indépendants donnant "pile" avec la probabilité p , le cours enseigne que :

N suit la loi géométrique de paramètre p

2) a) • Si m est pair, alors $m = 2k$, où k est un entier. Dans ce cas, $2 * \text{floor}(m/2)$ renvoie $2 \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor$, c'est-à-dire $2 \lfloor k \rfloor$, soit $2k$, c'est-à-dire m .

• Si m est impair, alors $m = 2k + 1$, où k est un entier. Dans ce cas, $2 * \text{floor}(m/2)$ renvoie $2 \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor$, c'est-à-dire $2 \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor$, soit $2k$, qui est différent de m .

On a donc montré que $2 * \text{floor}(m/2)$ ne renvoie la valeur m que lorsque m est pair.

b) Comme N suit la loi géométrique de paramètre p et comme la loi de X , conditionnellement à l'événement $(N = n)$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

```
p = input('donner la valeur de p'),
N = grand(1,1,'geom',p),
X = grand(1,1,'uin',1,N),
if X == 2*floor(X/2) then disp('le joueur a perdu'),
                        else disp('le joueur a gagné'),
end,
```

3) a) Si k est supérieur ou égal à j , alors $2k+1 \geq 2j+1 > 2j$ donc il est impossible de piocher la boule numérotée $2k+1$ car elle ne se trouve pas dans l'urne qui ne contient que les boules numérotées $1, 2, \dots, 2j$ (car on suppose l'événement $(N = 2j)$ réalisé).

On a donc :

$$P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = 0$$

b) Si k est supérieur ou égal à $j+1$, alors $2k+1 \geq 2j+3 > 2j+1$ donc il est impossible de piocher la boule numérotée $2k+1$ car elle ne se trouve pas dans l'urne qui ne contient que les boules $1, 2, \dots, 2j+1$ (car on suppose l'événement $(N = 2j+1)$ réalisé).

On a donc :

$$P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = 0$$

c) Si k appartient à $\llbracket 0, j-1 \rrbracket$, on a $1 \leq 2k+1 \leq 2j-1$ donc la boule numérotée $2k+1$ est dans l'urne puisque l'urne contient les boules numérotées $1, 2, \dots, 2j$ du fait de la réalisation de $(N = 2j)$.

On a donc $2j$ boules dans l'urne et une seule favorable à l'événement $(X = 2k+1)$, d'où :

$$P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j}$$

d) Si k appartient à $\llbracket 0, j \rrbracket$, on a $1 \leq 2k+1 \leq 2j+1$ donc la boule numérotée $2k+1$ est dans l'urne puisque l'urne contient les boules numérotées $1, 2, \dots, 2j+1$ du fait de la réalisation de $(N = 2j+1)$.

On a donc $2j+1$ boules dans l'urne et une seule favorable à l'événement $(X = 2k+1)$, d'où :

$$P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j+1}$$

4) a) En écrivant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements de probabilités non nulles $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a :

$$P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(X = 2k+1)$$

L'énoncé donnant le droit de scinder cette somme en séparant les n pairs des n impairs, on obtient :

$$P(X = 2k+1) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j) P_{(N=2j)}(X = 2k+1) + \sum_{j=0}^{+\infty} P(N = 2j+1) P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$$

Dans la première somme, les termes correspondant à $j \leq k$ sont nuls d'après la question 3a) et dans la deuxième somme, les termes correspondant à $j \leq k-1$ sont nuls d'après la question 3b). Il reste donc :

$$P(X = 2k+1) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(N = 2j) P_{(N=2j)}(X = 2k+1) + \sum_{j=k}^{+\infty} P(N = 2j+1) P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$$

D'après la question 3c), on a :

$$P(N = 2j) P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = q^{2j-1} p \times \frac{1}{2j} = \frac{p}{q} \times \frac{q^{2j}}{2j}$$

D'après la question 3d), on a :

$$P(N = 2j+1) P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = q^{2j} p \times \frac{1}{2j+1} = \frac{p}{q} \times \frac{q^{2j+1}}{2j+1}$$

En remplaçant, on trouve :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)$$

b) Grâce à la question 2d) de la partie 1, en remplaçant x par q , on sait que :

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \quad \text{et} \quad \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} = \int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$$

On en déduit, par linéarité de l'intégration :

$$P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt + \int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt \right) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k} + t^{2k+1}}{1-t^2} dt$$

$$P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}(1+t)}{(1-t)(1+t)} dt$$

En simplifiant, on trouve :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt$$

5) a) Pour tout t de $[0, q]$, on a : $1-q \leq 1-t \leq 1$ et par croissance de la fonction "carré" sur \mathbb{R}_+ , on en déduit : $(1-q)^2 \leq (1-t)^2 \leq 1$.

D'autre part, on a aussi : $1 \leq 1+t \leq 1+q$.

En multipliant ces deux derniers encadrements membre à membre, on obtient :

$$(1-q)^2 \leq (1-t)^2 (1+t) \leq 1+q$$

Comme $(1-q)^2 > 0$, on peut prendre les inverses :

$$\frac{1}{1+q} \leq \frac{1}{(1-t)^2 (1+t)} \leq \frac{1}{(1-q)^2}$$

En multipliant par $t^{2n+2} \geq 0$, on trouve :

$$\frac{t^{2n+2}}{1+q} \leq \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2 (1+t)} \leq \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}$$

Comme $\frac{t^{2n+2}}{1+q}$ est positif, on peut élargir à gauche :

$$0 \leq \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2 (1+t)} \leq \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}$$

Il reste à intégrer entre 0 et q ces fonctions continues, ce qui donne :

$$0 \leq \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2 (1+t)} dt \leq \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2} dt$$

En calculant l'intégrale de gauche, on trouve :

$$0 \leq \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2 (1+t)} dt \leq \frac{1}{(1-q)^2} \times \frac{q^{2n+3}}{2n+3}$$

Comme q est inférieur à 1, on peut élargir encore :

$$0 \leq \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2 (1+t)} dt \leq \frac{1}{(1-q)^2} \times \frac{1}{2n+3}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ donc, par encadrement, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2 (1+t)} dt = 0$$

b) D'après la question 4b), on a : $\sum_{k=0}^n P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \sum_{k=0}^n \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt$. Par

linéarité de l'intégration, on a alors, grâce à une technique analogue à celle utilisée à la question 2a) :

$$\sum_{k=0}^n P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^n t^{2k} dt = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \times \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t^2)} dt = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)} dt$$

En remarquant que $(1-t)(1-t^2) = (1-t)(1-t)(1+t) = (1-t)^2(1+t)$, et toujours par linéarité de l'intégration, on a finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \right)}$$

c) L'événement A est l'événement «le joueur a gagné » et A est réalisé si et seulement si le joueur obtient **un** numéro impair (pas seulement **le** numéro $2k+1$) donc on a :

$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = 2k+1)$$

Les événements $(X = 2k+1)$ sont 2 à 2 incompatibles donc :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(X = 2k+1)$$

Grâce aux questions 5a) et 5b), on obtient :

$$\boxed{P(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt}$$

6) a) Pour tout t différent de 1 et de -1 , on a :

$$\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} = \frac{a(1+t)(1-t) + b(1-t)^2 + c(1+t)}{(1+t)(1-t)^2} = \frac{a+b+c + (c-2b)t + (b-a)t^2}{(1+t)(1-t)^2}$$

On a $\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$ si et seulement si :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a+b+c + (c-2b)t + (b-a)t^2}{(1+t)(1-t)^2}$$

En identifiant les coefficients des numérateurs, on obtient le système (S) :

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ c-2b=0 \\ b-a=0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ c=2b \\ b=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ c=2a \\ b=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=1 \\ c=2a \\ b=a \end{cases}$$

On a donc : $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{1}{2}$.

Conclusion :

$$\boxed{\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{2}{(1-t)^2} \right)}$$

b) D'après la question 5c), on a : $P(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt$. En utilisant la question 6a), avec t élément de $[0, q]$, on a bien t différent de -1 et de 1 , ceci devient :

$$P(A) = \frac{p}{4q} \int_0^q \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{2}{(1-t)^2} \right) dt = \frac{p}{4q} \left[-\ln|1-t| + \ln|1+t| + \frac{2}{1-t} \right]_0^q$$

En calculant le crochet, on trouve : $P(A) = \frac{p}{4q} \left(-\ln|1-q| + \ln|1+q| + \frac{2}{1-q} - 2 \right)$.

En arrangeant un peu, on obtient : $P(A) = \frac{p}{4q} \left(\ln \left| \frac{1+q}{1-q} \right| + \frac{2q}{1-q} \right)$.

Comme $p = 1 - q$, on a finalement : $P(A) = \frac{1-q}{4q} \left(\ln \left| \frac{1+q}{1-q} \right| + \frac{2q}{1-q} \right)$.

En développant, on fait apparaître le terme $\frac{1}{2}$, ce qui est bon pour la suite :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1-q}{4q} \times \ln \left| \frac{1+q}{1-q} \right|}$$

c) Comme $0 < q < 1$, on a $1+q > 1-q > 0$ d'où $\left| \frac{1+q}{1-q} \right| = \frac{1+q}{1-q} > 1$, puis, par stricte croissance du logarithme népérien, on obtient : $\ln \left| \frac{1+q}{1-q} \right| > 0$.

Comme de plus, on a $\frac{1-q}{4q} > 0$ (car $0 < q < 1$), il en résulte que

$\frac{1-q}{4q} \times \ln \left| \frac{1+q}{1-q} \right| > 0$ et ainsi :

$$\boxed{P(A) > \frac{1}{2}}$$