Corrigé 2014

Exercice 1 ....

1) a) Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels $(A-\lambda I)$ n'est pas inversible.

Pour tout réel λ, $A-\lambda I = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$.

Avec l'opération $L_1 \leftrightarrow L_3$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant, on fait les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 6L_3 - (7-\lambda)L_1$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda+23 & -\lambda^2+10\lambda-15 \end{pmatrix}$$

On obtient un pivot plus agréable en effectuant l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -\lambda^2+11\lambda-16 \\ 0 & \lambda+23 & -\lambda^2+10\lambda-15 \end{pmatrix}$$

Pour finir, on effectue l'opération $L_3 \leftarrow 21L_3 - (\lambda+23)L_2$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -\lambda^2+11\lambda-16 \\ 0 & 0 & \lambda^3-9\lambda^2-27\lambda+53 \end{pmatrix}$$

La réduite de Gauss ci-dessus étant triangulaire, elle n'est pas inversible si et seulement si $\lambda^3-9\lambda^2-27\lambda+53 = 0$. Il en est de même de la matrice $(A-\lambda I)$.
En conclusion :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres } \lambda \text{ de } A \text{ sont les solutions de } \lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0}$$

b) La fonction f est polynomiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Avec $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, on a $f'(x) = 3(x^2 - 6x - 9)$.
Le trinôme $x^2 - 6x - 9$ a deux racines : $3(1+\sqrt{2})$ et $3(1-\sqrt{2})$.
On a donc (signe du trinôme) : $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})]$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Le tableau de variation de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		$3(1-\sqrt{2})$		$3(1+\sqrt{2})$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

c) On a $f(0) = 53 > 0$ et $f(3) = -82 < 0$.
Sur l'intervalle $[3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})]$, f est strictement décroissante donc, comme 0 appartient à cet intervalle, on a : $f(3(1-\sqrt{2})) > f(0)$, ce qui prouve que M est supérieur à 53, donc en particulier : $M > 0$.
De même 3 appartient à ce même intervalle donc $f(3) > f(3(1+\sqrt{2}))$, ce qui prouve que : m est inférieur à -82, donc en particulier : $m < 0$.

d) En appliquant trois fois le théorème de la bijection à la fonction f sur les intervalles $]-\infty, 3(1-\sqrt{2})[$, $]3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})[$ et $]3(1+\sqrt{2}), +\infty[$, intervalles sur lesquels f est continue et strictement monotone, et comme le nombre 0 appartient aux intervalles images (puisque $m < 0 < M$), on peut affirmer que la fonction f s'annule une fois sur chacun des intervalles $]-\infty, 3(1-\sqrt{2})[$, $]3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})[$ et $]3(1+\sqrt{2}), +\infty[$ en des réels que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3.
Ceci prouve, en relation avec la question 1a), que la matrice A possède 3 valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 et λ_3.
A étant une matrice de taille 3 ayant 3 valeurs propres distinctes, on peut dire que :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

e) Comme A est diagonalisable, on sait que, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ est la matrice dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A, alors il existe une matrice inversible P telle que $A = P\,D\,P^{-1}$, les colonnes de la matrice P étant respectivement les vecteurs de base des sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.

2) a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & u & x \\ b & v & y \\ c & w & z \end{pmatrix}$. Comme $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, N commute avec D si et seulement si $\begin{pmatrix} a & u & x \\ b & v & y \\ c & w & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & u & x \\ b & v & y \\ c & w & z \end{pmatrix}$

Ce qui signifie : $\begin{pmatrix} a\lambda_1 & u\lambda_2 & x\lambda_3 \\ b\lambda_1 & v\lambda_2 & y\lambda_3 \\ c\lambda_1 & w\lambda_2 & z\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & u\lambda_1 & x\lambda_1 \\ b\lambda_2 & v\lambda_2 & y\lambda_2 \\ c\lambda_3 & w\lambda_3 & z\lambda_3 \end{pmatrix}$.

En identifiant, et après factorisation, on obtient :
$ND = DN \Leftrightarrow u(\lambda_2-\lambda_1) = x(\lambda_3-\lambda_1) = b(\lambda_2-\lambda_1) = y(\lambda_3-\lambda_2) = c(\lambda_3-\lambda_1) = w(\lambda_3-\lambda_2) = 0$.

Comme λ_1, λ_2 et λ_3 sont deux à deux distinctes, les facteurs $(\lambda_2-\lambda_1)$, $(\lambda_3-\lambda_1)$ et $(\lambda_3-\lambda_2)$ sont non nuls et on obtient :

$$ND = DN \Leftrightarrow u = x = b = y = c = w = 0.$$

En remplaçant dans l'expression de N, on trouve finalement :

$$ND = DN \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Ceci prouve bien que :

$$\boxed{\text{Les matrices qui commutent avec } D \text{ sont les matrices diagonales}}$$

b) $M \in E \Leftrightarrow MA = AM \Leftrightarrow MPDP^{-1} = PDP^{-1}M.$
En multipliant les deux membres à gauche par P^{-1} et à droite par P, l'équivalence est respectée (puisque P et P^{-1} sont inversibles) et on trouve :
$M \in E \Leftrightarrow P^{-1}MPDP^{-1}P = P^{-1}PDP^{-1}MP.$
Finalement, après simplification : $M \in E \Leftrightarrow P^{-1}MPD = DP^{-1}MP.$
On a bien montré que :

$$\boxed{M \in E \Leftrightarrow P^{-1}M\,P \text{ commute avec } D}$$

c) D'après la question 2c), on sait alors que $P^{-1}M\,P$ est diagonale. Il existe donc 3 réels a, b et c tels que :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En multipliant les deux membres à gauche par P et à droite par P^{-1}, on trouve :

$$M = a\,P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + b\,P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + c\,P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

On a bien le résultat demandé :

$$\boxed{M \text{ est combinaison linéaire de } P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}}$$

d) E est l'ensemble des combinaisons linéaires des 3 matrices ci-dessus donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
La famille constituée des 3 matrices ci-dessus est ainsi une famille génératrice de l'espace vectoriel E.
Testons sa liberté en considérant 3 réels a, b et c tels que :

$$a\,P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + b\,P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + c\,P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = 0$$

Ceci s'écrit : $P\left(a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)P^{-1}=0$.

En multipliant les deux membres à gauche par P^{-1} et à droite par P, on trouve :

$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=0,\ \text{soit encore}\ \begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}=0.$$

On conclut bien sûr que : $a = b = c = 0$.

La famille $\left(P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)$ est libre, et comme elle engendre E, c'est une base de E et on peut conclure :

$$\boxed{\dim E = 3}$$

e) • S'il existait un polynôme annulateur de A non nul et de degré inférieur ou égal à 2, les valeurs propres de A seraient parmi les racines de ce polynômes et ainsi, A aurait au maximum deux valeurs propres, ce qui n'est pas le cas.

• Pour montrer que (I, A, A^2) est une base de E, il suffit de montrer que ces trois matrices appartiennent à E et forment une famille libre (car on sait que E est de dimension 3).

• On a : $IA = A = AI$ donc $I \in E$.

• A commute avec elle-même donc $A \in E$.

• De plus : $AA^2 = A^3 = A^2A$ donc $A^2 \in E$.

• Il reste à montrer que (I, A, A^2) est une famille libre.

Raisonnons par l'absurde : si la famille (I, A, A^2) était liée, il existerait trois réels a, b et c non tous nuls tels que $aI + bA + cA^2 = 0$. Ceci prouverait que le polynôme non nul $a + bX + cX^2$ serait annulateur de A, ce qui est impossible puisque A ne possède pas de polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 2

$$\boxed{(I, A, A^2)\text{ est une base de }E}$$

Remarque. Par une méthode directe (test de liberté après calcul de A^2), on prouve facilement la liberté de cette famille mais l'énoncé exigeait une méthode originale.

Exercice 2 ....

1) La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur tout intervalle de la forme $[x, 2x]$ si $x \geq 0$ ou $[2x, x]$ si $x \leq 0$: ceci prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$ est définie pour tout réel x.

2) L'ensemble de définition de f est bien centré en 0 (c'est $\mathbb{R}$) et, pour tout réel x, on a :

$$f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

Le changement de variable $u = -t$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (donc de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration) donne alors :

$$f(-x)=\int_{x}^{2x}\frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}}(-du)$$

On en déduit : $f(-x)=-\int_{x}^{2x}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du=-f(x)$.

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est impaire}}$$

3) a) En notant H une primitive de h sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = H(2x) - H(x)$. Comme H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (puisque sa dérivée est h qui est continue), on peut affirmer que, par composition et différence, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2h(2x)-h(x)=\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}\sqrt{x^2+1}}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+1}$, on obtient :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{3}{(2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+1})\sqrt{x^2+1}\sqrt{4x^2+1}}}$$

b) On a tout de suite : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) > 0$. Ceci montre que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

4) a) Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, la relation donnée par l'énoncé nous donne : $t\le\sqrt{t^2+1}\le t+1$ ($\sqrt{t^2}=t$ car $t\ge 0$).
On peut alors inverser, pour tout t strictement positif, et on obtient :

$$\forall t>0,\ \frac{1}{t+1}\le\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\le\frac{1}{t}$$

Pour tout réel x strictement positif, on peut intégrer ces fonctions continues sur l'intervalle $[x, 2x]$, avec les bornes dans l'ordre croissant, ce qui donne :

$$\int_x^{2x}\frac{1}{t+1}dt\le f(x)\le\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$$

On peut écrire ceci sous la forme : $\ln(2x+1)-\ln x\le f(x)\le\ln 2x-\ln x$.
On obtient enfin :

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)\le f(x)\le\ln 2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+1}=2$ donc, par continuité de ln en 2, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\frac{2x+1}{x+1})=\ln 2$.

Le théorème d'encadrement permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2}$$

c) Par imparité de *f*, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\ln 2$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$

d) Comme $f(0)=0$ (évident) et comme *f* est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\ln 2, \ln 2[$ et ainsi, l'équation $f(x)=0$ a une seule solution et cette solution est 0.

5) a) Pour tout réel *x*, on a : $x^2+1>x^2$. En appliquant la fonction racine carrée, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $\sqrt{x^2+1}>|x|$.

De plus, on sait que $|x|\geq -x$ (il y a égalité si *x* est négatif et si *x* est strictement positif, alors l'inégalité est évidente entre le nombre strictement positif $|x|$ et le nombre strictement négatif $-x$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ x+\sqrt{x^2+1}>0}$$

b) D'après ce qui précède, la fonction *h* qui, à tout réel *x* associe $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est bien définie et elle est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

On trouve :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

c) On vient de montrer que *h* est une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, ce qui permet d'écrire : $f(x)=h(2x)-h(x)$.

En remplaçant par les expressions de $h(x)$ et $h(2x)$, on trouve :

$$\boxed{f(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

6) a) Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} 1dt - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)dt$$

On a alors, en réduisant au même dénominateur :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}}\right)dt$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{t^2+1}+1$, on obtient :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}\,dt$$

En simplifiant le numérateur, on trouve :

$$\boxed{x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}dt}$$

b) Il est évident que $x - f(x) \geq 0$ (intégrale bornes dans l'ordre croissant d'une fonction positive).

Ensuite, il faut majorer la fonction intégrée en minorant $\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)$ par 2 (puisque $t^2+1 \geq 1$), ce qui donne : $\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} \leq \dfrac{t^2}{2}$.

En intégrant, bornes toujours dans l'ordre croissant, on obtient :

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}dt \leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{2}dt$$

Comme $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{2}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_x^{2x} = \frac{1}{6}\left(8x^3 - x^3\right)$, on trouve enfin :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3}$$

c) En divisant les trois membres de cet encadrement par x qui est strictement positif, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq 1 - \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{7}{6}x^2$.

Le théorème d'encadrement assure que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(1 - \frac{f(x)}{x}\right) = 0$, ce qui veut dire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = 1$. Conclusion :

$$\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} x}$$

d) On en déduit que, si x est au voisinage de 0^-, alors $-x$ est au voisinage de 0^+ et d'après ce qui précède, on a : $f(-x) \underset{0^-}{\sim} -x$.

Comme la fonction *f* est impaire, ceci s'écrit : $-f(x) \underset{0^-}{\sim} -x$ et on a : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Exercice 3 ....

1) • Comme θ est un réel strictement positif, tous les termes de la suite (u_k) sont bien définis (car $1+\theta>0$) et positifs (car $\theta>0$ et $1+\theta>0$).

• La série de terme général $\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$ est une série géométrique convergente puisque sa raison $\dfrac{\theta}{1+\theta}$ appartient à $]0,1[$ donc, a fortiori, à $]-1,1[$.

On a alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{1+\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta}\times\frac{1}{1-\dfrac{\theta}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta}\times\frac{1}{\dfrac{1}{1+\theta}} = 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ définit une loi de probabilité}}$$

2) Comme $Y=X+1$, on a $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et, pour tout *k* de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P(Y=k)=P(X+1=k)=P(X=k-1)=\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k-1}$$

On en conclut que *Y* suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{1+\theta}$, ce qui prouve que : $E(Y)=1+\theta$ et $V(Y)=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+\theta}}{\dfrac{1}{(1+\theta)^2}}=\dfrac{\theta}{1+\theta}\times(1+\theta)^2=\theta(1+\theta)$.

Avec la relation $X=Y-1$, on obtient :

$$E(X)=E(Y)-1=1+\theta-1=\theta \text{ et } V(X)=V(Y)=\theta(1+\theta)$$

Bilan :

$$\boxed{E(X)=\theta \text{ et } V(X)=\theta(1+\theta)}$$

3) a) Par définition de la fonction *L*, et comme les variables X_k ont la même loi que *X*, on a : $L(\theta)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}P(X_k=x_k)=\prod_{k=1}^{n}P(X=x_k)$.

En remplaçant les probabilités, on obtient :

$$L(\theta)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right)=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n\prod_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right)$$

Comme tout est strictement positif, on peut prendre le logarithme et, grâce aux propriétés du logarithme, on trouve :

$$\ln\left(L(\theta) \right) = n\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + \sum_{k=1}^{n} x_k \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) = n\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Avec la notation donnée par l'énoncé, on a finalement :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(L(\theta) \right) = n\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + S_n \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

On peut arranger ceci en prévision de la suite, toujours avec les propriétés du logarithme : $\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(L(\theta) \right) = -n\ln(1+\theta) + S_n\left(\ln\theta - \ln(1+\theta)\right)$.

En regroupant, on a :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(L(\theta) \right) = S_n \ln\theta - (S_n + n)\ln(1+\theta)}$$

b) Pour tout θ de $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\varphi(\theta) = S_n \ln\theta - (S_n + n)\ln(1+\theta)$.

La fonction φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(\theta) = \frac{S_n}{\theta} - \frac{S_n + n}{1+\theta} = \frac{S_n - n\theta}{\theta(1+\theta)}$$

Comme le dénominateur est positif, $\varphi'(\theta)$ a même signe que $S_n - n\theta$ et on a :

$$\varphi'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow S_n - n\theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq \frac{S_n}{n}$$

Ceci prouve que φ est croissante sur $\left]-\infty, \frac{S_n}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{S_n}{n}, +\infty\right[$ donc φ admet un maximum atteint en $\hat{\theta} = \frac{S_n}{n}$.

On vient de montrer que $\ln L$ a un maximum en $\hat{\theta} = \frac{S_n}{n}$. De plus, $\ln L$ a les mêmes variations que L (car $(\ln L)' = \frac{L'}{L}$ et L est positive donc $(\ln L)'$ a le même signe que L'), par conséquent :

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{S_n}{n} \text{ est le réel en lequel } L \text{ atteint son maximum}}$$

c) Comme les variables X_i ont toutes une espérance égale à θ, alors T_n a une espérance et, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta = \frac{1}{n} \times n\theta = \theta$$

$$\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$$

d) Comme T_n est un estimateur sans biais de θ, son risque quadratique est égal à sa variance et on a : $r_{T_n}(\theta) = V(T_n) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$. Comme les X_i sont indépendantes, on obtient :

$$r_{T_n}(\theta) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\theta(1+\theta) = \frac{1}{n^2}\times n\theta(1+\theta)$$

On a donc :

$$\boxed{r_{T_n}(\theta) = \frac{\theta(1+\theta)}{n}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_{T_n}(\theta) = 0}$$

Problème...

1) a) Le réel x étant fixé, la fonction $h : t \mapsto \max(x,t)$ est définie par :

$$h(t) = \begin{cases} x \text{ si } t \leq x \\ t \text{ si } t > x \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$: elle est constante égale à x sur $]-\infty, x]$, affine sur $]x, +\infty[$ et elle est continue en x puisque $\lim_{t\to x^-} h(t) = h(x) = x = \lim_{t\to x^+} h(t)$.

La fonction h est donc, a fortiori, continue sur $[0,1]$, ce qui prouve l'existence de l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x,t)dt$.

b) • Si x est négatif ou nul, alors, comme t appartient à $[0,1]$, on a $x \leq t$ et :

$$y = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

• Si x appartient à $]0,1[$, alors :

$$y = \int_0^x \max(x,t)dt + \int_x^1 \max(x,t)dt = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt = x^2 + \frac{1-x^2}{2} = \frac{x^2+1}{2}$$

• Si x est supérieur à 1, alors, comme t appartient à $[0,1]$, on a $t \leq x$ et :

$$y = \int_0^1 x\,dt = x$$

Bilan :

$$\boxed{y = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}}$$

2) Si X suit une loi géométrique alors X prend des valeurs supérieures ou égales à 1 et, pour tout ω de Ω, on a : $Y(\omega)=\int_0^1 X(\omega)dt = X(\omega)$.

Ceci étant vrai pour tout ω de Ω, on a : $Y=X$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Si } X \text{ suit une loi géométrique alors on a : } Y=X}$$

3) a) Comme $X(\Omega)=\{-1,0,1\}$, la famille $((X=-1),(X=0),(X=1))$ est un système complet d'événements et on a : $P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=1$. Comme $P(X=-1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$, on en déduit :

$$\boxed{P(X=0)=\frac{1}{2}}$$

b) D'après la première question, on peut affirmer les choses suivantes :

• Si X prend la valeur -1 ou la valeur 0, alors Y prend la valeur $\frac{1}{2}$.

• Si X prend la valeur 1, alors Y prend la même valeur que X, c'est-à-dire 1.

Conclusion :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left\{\frac{1}{2},1\right\}}$$

On a : $P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=P(X=-1)+P(X=0)=\frac{3}{4}$ et $P(Y=1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$.

c) La déclaration complétée est la suivante :

```
Function y : real ;
Var x : real ;
Begin
x : = random(3) – 1 ;
If x = 1 then y : = 1 else y : = 1 / 2 ;
End ;
```

4) a) Comme X prend des valeurs comprises entre 0 et 1, alors, toujours d'après la première question, et ceci même si X prend les valeurs 0 et 1, on a :

$$\boxed{Y=\frac{X^2+1}{2}}$$

Remarque. En effet, si X prend la valeur 0, cette égalité donne pour Y la valeur $\frac{1}{2}$, ce qui est correct, et si X prend la valeur 1, cette égalité donne pour Y la valeur 1, comme X, ce qui est encore correct.

b) Comme X^2 prend ses valeurs entre 0 et 1, alors X^2+1 prend ses valeurs entre 1 et 2 et Y prend ses valeurs entre $\frac{1}{2}$ et 1.

$$\boxed{Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},1\right]}$$

c) Pour tout x de $\left[\frac{1}{2},1\right]$, on a :

$F_Y(x)=P(Y\le x)=P\left(\frac{X^2+1}{2}\le x\right)=P\left(X^2+1\le 2x\right)=P\left(X^2\le 2x-1\right)$.

Comme $2x-1$ est positif, on obtient : $F_Y(x)=P\left(-\sqrt{2x-1}\le X\le\sqrt{2x-1}\right)$.

On a donc : $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $F_Y(x)=F_X\left(\sqrt{2x-1}\right)-F_X\left(-\sqrt{2x-1}\right)$.

Pour finir, $-\sqrt{2x-1}$ est négatif donc $F_X\left(-\sqrt{2x-1}\right)$ est nul et $\sqrt{2x-1}$ appartient à $[0,1]$ donc $F_X\left(\sqrt{2x-1}\right)=\sqrt{2x-1}$. Ainsi, il reste :

$$\boxed{\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ F_Y(x)=\sqrt{2x-1}}$$

d) Si on complète la définition de F_Y, on obtient :

$$F_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<\frac{1}{2}\\ \sqrt{2x-1} \text{ si } \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$$

On sait déjà que Y est une variable aléatoire (c'est admis par l'énoncé), il reste à vérifier deux conditions :

- F_Y est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

La continuité de F_Y sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ et sur $]1,+\infty[$ est acquise puisque la restriction de F_Y à ces intervalles est constante donc continue.

La continuité de F_Y sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$ est acquise puisque F_Y est polynomiale sur cet intervalle.

En $\frac{1}{2}$, on a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} F_Y(x)=F_Y(\frac{1}{2})=0$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} F_Y(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} 0=0$.

En 1, on a : $\lim\limits_{x\to 1^+} F_Y(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} F_Y(x)=F_Y(1)=0$.

Premier bilan : la fonction F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$.

• F_Y est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points (ici, en $\frac{1}{2}$ et en 1) ?

La classe C^1 de F_Y sur $]1,+\infty[$ et sur $]1,+\infty[$ est acquise puisque F_Y est constante sur ces intervalles.

La classe C^1 de F_Y sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$ est acquise puisque F_Y polynomiale sur cet intervalle.

Deuxième bilan : la fonction F_Y est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en $\frac{1}{2}$ et en 1.

On peut conclure :

$$\boxed{Y \text{ est une variable à densité}}$$

e) D'après la question 4a), on sait que : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

Montrons que X possède un moment d'ordre 2, ce qui garantira que Y possède une espérance.

Comme X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, une densité de X est la fonction f_X définie par : $f_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Par conséquent, les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x^2 f_X(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$ existent et sont nulles car la fonction intégrée est nulle, et l'intégrale $\int_0^1 x^2 f_X(x)dx$ existe car la fonction intégrée est continue sur $[0,1]$.

On peut conclure que X possède un moment d'ordre 2 et que :

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Par linéarité de l'espérance, on a : $E(Y) = \frac{1}{2}E(X^2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$.

Bilan :

$$\boxed{E(Y) = \frac{2}{3}}$$

f) La déclaration de fonction complétée est la suivante :

```
Function y : real ;
      Var u : real ;
   Begin
      u : = random ;
      y : = (sqr(u) + 1) / 2 ;
   End ;
```

5) a) D'après la première question, on a, pour tout ω de Ω :

$$Y(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} \text{ si } X(\omega)\leq 0\\ \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} \text{ si } 0<X(\omega)<1\\ X(\omega) \text{ si } X(\omega)\geq 1\end{cases}$$

On en déduit :

• Lorsque X prend des valeurs négatives ou nulles, Y prend la valeur $\frac{1}{2}$.

• Lorsque X prend des valeurs entre 0 et 1, Y prend des valeurs entre $\frac{1}{2}$ et 1 comme à la question 4b).

• Lorsque X prend des valeurs supérieures à 1, Y prend des valeurs supérieures à 1 (puisque Y et X prennent les mêmes valeurs).

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[}$$

b) En analysant précisément les trois points ci-dessus, on voit que Y prend la valeur $\frac{1}{2}$ si, et seulement si, X prend des valeurs négatives ou nulles.

On a donc : $P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=P(X\leq 0)=\Phi(0)$. Comme $\Phi(0)=\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\boxed{P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}}$$

c) Pour commencer, si $x<\frac{1}{2}$, on a : $F_Y(x)=0$.

Pour tout x supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X\leq 0],[0<X\leq 1],[X>1])$ s'écrit :

$$P(Y\leq x)=P(X\leq 0)+P([Y\leq x]\cap[0<X\leq 1])+P([Y\leq x]\cap[X>1])$$

D'après l'étude faite à la question 5a), on obtient :

$$P(Y\leq x)=P([Y\leq x]\cap[X\leq 0])+P\left(\left[\frac{X^2+1}{2}\leq x\right]\cap[0<X\leq 1]\right)+P([X\leq x]\cap[X>1])$$

On a donc :

$$F_Y(x)=P(X\leq 0)+P\left(\left[-\sqrt{2x-1}\leq X\leq\sqrt{2x-1}\right]\cap[0<X\leq 1]\right)+P([X\leq x]\cap[X>1])$$

$$F_Y(x)=P(X\leq 0)+P\left(\max\left(-\sqrt{2x-1},0\right)<X\leq\min\left(\sqrt{2x-1},1\right)\right)+P([X\leq x]\cap[X>1])$$

Comme $-\sqrt{2x-1} \leq 0$, on peut simplifier la deuxième probabilité et on a :

$$F_Y(x) = P(X \leq 0) + P\left(0 < X \leq \min\left(\sqrt{2x-1}, 1\right)\right) + P\left([X \leq x] \cap [X > 1]\right)$$

À ce stade, il faut savoir si x est supérieur à 1 ou pas, afin de trancher pour la valeur du max mis en jeu dans la deuxième probabilité et pour savoir si la troisième probabilité est nulle ou pas.

- Si $x \leq 1$, alors $\min\left(\sqrt{2x-1}, 1\right) = \sqrt{2x-1}$ et $P\left([X \leq x] \cap [X > 1]\right) = 0$ donc :

$F_Y(x) = P(X \leq 0) + P\left(0 < X \leq \sqrt{2x-1}\right) = P\left(X \leq \sqrt{2x-1}\right) = \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right)$.

- Si $x > 1$, alors $\min\left(\sqrt{2x-1}, 1\right) = 1$ et $\left([X \leq x] \cap [X > 1]\right) = (1 < X \leq x)$ donc :

$F_Y(x) = P(X \leq 0) + P(0 < X \leq 1) + P(1 < X \leq x) = P(X \leq x) = \Phi(x)$.

Bilan :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \dfrac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \Phi(x) \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

d) Comme $P\left(Y = \dfrac{1}{2}\right) \neq 0$, Y n'est pas une variable à densité et comme $Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, Y n'est pas une variable discrète.