Corrigé EDHEC

Exercice 1..

1) a) On procède par récurrence.

- $u_0 = 0$ donc $0 \le u_0 \le 1$.
- Supposons, pour un n fixé dans $\mathbb{N}$ que : $0 \le u_n \le 1$.

Par croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur , on a : $0 \le u_n^2 \le 1$

Il reste à ajouter 1, ce qui donne $1 \le u_n^2 + 1 \le 2$.

En divisant par 2, on obtient : $\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$, ce qui implique que : $0 \le u_{n+1} \le 1$.

- On a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n \le 1}$$

b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2}.$$

Ceci prouve que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

c) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1) donc elle converge.

Par ailleurs, si l'on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, alors on a aussi $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$.

En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$, comme la fonction $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue en ℓ, on trouve : $\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2}$.

On a tout de suite $\frac{(\ell - 1)^2}{2} = 0$, ce qui donne $\ell = 1$.

En conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

2) a) Voici une version récursive :

Function u(n : integer) : real ;
  Begin
    If $n = 0$ **then** u : = 0 **else** u : = (sqr(u($n-1$)) + 1) / 2 ;
  End ;

Voici une version itérative :

```
Function u(n : integer) : real ;
   Var   k : integer ;
         aux : real ;  {la variable aux contiendra les valeurs prises par u_k au cours de la boucle}
   Begin
      aux : = 0 ;
      For k : = 1 to n do aux : = (sqr(aux) + 1) / 2 ;
      u : = aux ;
   End ;
```

b) Program edhec2013 ;

```
Var   n : integer ;
Begin
n : = 0 ; Repeat n : = n + 1 ; until (u(n) > 0.999) ;
Writeln(n) ;
End.
```

3) a) Pour tout entier naturel k, on a : $v_k - v_{k+1} = (1 - u_k) - (1 - u_{k+1}) = u_{k+1} - u_k$.

On a donc : $v_k - v_{k+1} = \dfrac{(u_k - 1)^2}{2}$, ce qui s'écrit :

$$\boxed{v_k - v_{k+1} = \frac{v_k^{\,2}}{2}}$$

b) $\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}$. En posant $i = k + 1$ dans la deuxième somme, on trouve : $\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Les termes communs aux deux sommes se neutralisent et il reste :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n$. Comme $v_0 = 1 - u_0 = 1$ et $v_n = 1 - u_n$, on trouve :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = u_n}$$

c) D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k^2 = 2 \sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = 2\, u_n$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$, on peut affirmer que $\sum_{k=0}^{n-1} v_k^2$ a une limite finie (égale à 2) lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui veut dire que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } v_n^{\,2} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2 = 2}$$

Exercice 2...

1) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a bien :

$$\boxed{A^2 \neq 0 \text{ et } A^3 = 0}$$

b) On va résoudre le système d'équations $AX = 0$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On a alors : $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$

Avec la transformation $L_2 \leftarrow L_3 - L_2$, on obtient :

$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -x$ et $y = 0$.

$AX = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ceci prouve que, en posant $a = (1, 0, -1)$, on a : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(a)$
Comme le vecteur a est non nul, on a bien :

$$\boxed{(a) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f}$$

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, le théorème du rang assure que $\dim \operatorname{Im} f = 2$.
Par ailleurs, $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(\, f(e_1), f(e_2), f(e_3)\,)$ et comme $f(e_1) = f(e_3) = (2, -1, -1)$ et $f(e_2) = (1, -1, 0)$, on a :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(\,(2, -1, -1), (1, -1, 0)\,)}$$

En posant $b = (2, -1, -1)$ et $c = (1, -1, 0)$, on vient de montrer que (b, c) est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. De plus, elle contient 2 vecteurs et $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2, donc :

$$\boxed{(b, c) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f}$$

c) Comme $A^2 = = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{vect}(\,(1, 0, -1)\,) = \mathrm{vect}(a)$.

$$\boxed{\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Ker}\, f}$$

2) a) Comme $M^3 = 0$, le polynôme X^3 est un polynôme annulateur de M. De plus, on sait que les valeurs propres de M (donc de g) sont parmi les racines de tout polynôme annulateur de M, et comme la seule racine de X^3 est 0, alors :

$$\boxed{\text{La seule valeur propre possible de } g \text{ est } 0}$$

b) D'autre part, si 0 n'était pas valeur propre, M serait inversible et, en multipliant la relation $M^3 = 0$ par M^{-1}, on aurait $M^2 = 0$, ce qui est faux d'après l'énoncé.

$$\boxed{\text{La seule valeur propre de } g \text{ est } 0}$$

c) On raisonne par l'absurde.
Si g était diagonalisable, alors M serait semblable à une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de M, donc tous nuls.
En notant 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existerait donc une matrice P inversible telle que l'on ait $M = P\, 0_3\, P^{-1}$ et on aurait $M = 0_3$, puis $M^2 = 0_3$ et ceci est faux d'après l'énoncé.

$$\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

3) a) Comme g^2 n'est pas l'endomorphisme nul, on peut dire que

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } u \text{ tel que } g^2(u) \neq 0}$$

b) Pour montrer que $(\,u, g(u), g^2(u)\,)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que c'est une famille libre, puisqu'elle contient 3 vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
Soit donc 3 réels a, b et c tels que $a\,u + b\,g(u) + c\,g^2(u) = 0$. (1)
En composant par g, on obtient $g(\,a u + b\,g(u) + c\,g^2(u)\,) = g(0)$.
Comme g est linéaire, on a alors : $a\,g(u) + b\,g^2(u) + c\,g^3(u) = 0$.
On se souvient que $g^3 = 0$ donc il reste : $a\,g(u) + b\,g^2(u) = 0$. (2)
En composant encore par g, on obtient : $a\,g^2(u) + b\,g^3(u) = 0$, soit $a\,g^2(u) = 0$ (car $g^3 = 0$).
Comme $g^2(u) \neq 0$, on a $a = 0$.
En remplaçant a par 0 dans l'égalité (2), on en déduit : $b = 0$ (car $g^2(u) \neq 0$).
En remplaçant alors a et b par 0 dans l'égalité (1), on trouve pour finir : $c = 0$.
La famille $(\,u, g(u), g^2(u)\,)$ est libre et on peut conclure :

$$\boxed{(\,u, g(u), g^2(u)\,) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

c) On a :
$g(u) = 0\,u + 1\,g(u) + 0\,g^2(u)$.
$g(\,g(u)\,) = g^2(u) = 0\,u + 0\,g(u) + 1\,g^2(u)$.
$g(\,g^2(u)\,) = g^3(u) = 0 = 0\,u + 0\,g(u) + 0\,g^2(u)$.

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La matrice } N \text{ de } g \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ est : } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) La matrice N est la matrice de g dans la base $\mathcal{B}' = (\ u, g(u), g^2(u)\ )$.
On en déduit, par lecture des colonnes de N, que :

$$\boxed{\operatorname{Im} g = \operatorname{vect}(\ g(u), g^2(u)\ )}$$

La famille $(\ g(u), g^2(u)\ )$ est libre (ce sont 2 vecteurs de la base $\mathcal{B}'$) donc $(\ g(u), g^2(u)\ )$ est une base de $\operatorname{Im} g$. On a donc :

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} g = 2}$$

On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} g = 1$.
Par ailleurs, la troisième colonne de N assure que $g^2(u)$ est un vecteur non nul élément de $\operatorname{Ker} g$, et comme $\dim \operatorname{Ker} g = 1$, la famille $(g^2(u)\ )$ est une base de $\operatorname{Ker} g$.
On a donc :

$$\boxed{\operatorname{Ker} g = \operatorname{vect}(\ g^2(u)\ )}$$

Pour finir, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On voit alors, comme pour $\operatorname{Im} g$, que $\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{vect}(\ g^2(u)\ )$ et on a donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Ker} g}$$

Exercice 3..

1) a) Au premier tirage, soit on tire une boule blanche et il n'y a plus de boules blanches dans l'urne, ce qui réalise $(X_1 = 0)$, soit on tire une boule noire et l'urne contient alors 2 boules blanches (puisqu'une boule blanche est rajoutée dans l'urne), ce qui réalise $(X_1 = 2)$.
On a donc :

$$\boxed{X_1(\Omega) = \{0, 2\},\ P(X_1 = 0) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X_1 = 2) = \frac{3}{4}}$$

b) Après le premier tirage, d'après la règle du jeu, on a soit 0 boule blanche et 2 boules noires, soit 2 boules blanches et 4 boules noires dans l'urne.
→ Dans le premier cas, on est certain de tirer une boule noire au deuxième tirage, donc, d'après la règle du jeu, l'urne contient une boule blanche et 3 boules noires et X_2 prend la valeur 1.
→ Dans le deuxième cas :
• Soit on tire une boule blanche et l'urne contient alors une boule blanche et 3 boules noires, ce qui fait que X_2 prend encore la valeur 1.
• Soit on tire une boule noire et l'urne contient alors 3 boules blanches et 5 boules noires, ce qui fait que X_2 prend la valeur 3.

Pour conclure, on a :

$$\boxed{X_2(\Omega) = \{1, 3\}}$$

En notant B_1 (respectivement N_1) l'événement « la première boule tirée est blanche (respectivement noire) », la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (B_1, N_1) s'écrit :

$$P(X_2 = 1) = P(B_1)\, P_{B_1}(X_2 = 1) + P(N_1)\, P_{N_1}(X_2 = 1)$$

On a : $P_{B_1}(X_2 = 1) = 1$ car si B_1 est réalisé, on est certain de tirer une boule noire au deuxième tirage (puisque l'urne contient 0 boule blanche et 2 boules noires) et de ce fait, l'urne contiendra une seule boule blanche après le deuxième tirage.

On a aussi : $P_{N_1}(X_2 = 1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ car l'urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

En remplaçant, on trouve : $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{4} \times 1 + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

De même, on a : $P(X_2 = 3) = P(B_1)\, P_{B_1}(X_2 = 3) + P(N_1)\, P_{N_1}(X_2 = 3)$.

On a : $P_{B_1}(X_2 = 3) = 0$ car si B_1 est réalisé, on est certain de piocher une boule noire et on aura une seule boule blanche dans l'urne à coup sûr (voir plus haut).

On a aussi : $P_{N_1}(X_2 = 3) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ car l'urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

En remplaçant, on trouve : $P(X_2 = 3) = \dfrac{1}{4} \times 0 + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} = 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

En résumé :

$$\boxed{X_2(\Omega) = \{1, 3\},\ P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(X_2 = 3) = \frac{1}{2}}$$

c)
```
Program simul ;
Var X1, X2, tirage : integer ;
Begin
tirage : = random(4) ; If tirage = 0 then X1 : = 0 else X1 : = 2 ;
If (X1 = 0)  then  X2 : = 1
             Else  begin   tirage : = random(6) ;
                           If tirage <= 1 then X2 : = 1 else X2 : = 3 ;
                   end ;
Writeln (X1, X2) ;
end.
```

2) En appliquant encore la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (B_1, N_1), on obtient : $P(E_n) = P(B_1)\, P_{B_1}(E_n) + P(N_1)\, P_{N_1}(E_n)$.

• Au départ, l'urne contient n boules blanches et $(n+2)$ boules noires, on a donc :

$P(B_1) = \dfrac{n}{2n+2}$ et $P(N_1) = \dfrac{n+2}{2n+2}$.

• Par ailleurs, $P_{B_1}(E_n) = e_{n-1}$: en effet, ayant obtenu une boule blanche au premier tirage, l'urne contient $n-1$ boules blanches et se retrouve donc dans l'état $(n-1)$. Ainsi, réaliser E_n revient à attendre l'arrêt des tirages, selon la même procédure, mais avec une urne dans l'état $(n-1)$, ce qui se fait avec la probabilité e_{n-1}.

• De même, $P_{N_1}(E_n) = e_{n+1}$: en effet, ayant obtenu une boule noire au premier tirage, l'urne contient $n+1$ boules blanches et se retrouve dans l'état $(n+1)$. Ainsi, réaliser E_n revient alors à

attendre l'arrêt des tirages, selon la même procédure, mais avec une urne dans l'état $(n+1)$, ce qui se fait avec la probabilité e_{n+1}.
En injectant ces données dans la formule écrite plus haut et donnant $P(E_n)$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e_n = \frac{n}{2n+2}e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}}$$

3) a) • Pour $n = 0$, on a $e_0 = 1$ et comme e_1 est une probabilité, on a bien $e_0 \geq e_1$.

• Si l'on suppose, pour un entier naturel n fixé supérieur ou égal à 1, que l'on a $e_{n-1} \geq e_n$, alors $\frac{n}{2n+2}e_{n-1} \geq \frac{n}{2n+2}e_n$. Grâce à l'égalité obtenue à la question 2), on peut en déduire :
$e_n \geq \frac{n}{2n+2}e_n + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}$, soit : $e_n(1-\frac{n}{2n+2}) \geq \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}$.
En finissant le calcul dans la parenthèse, on trouve $\frac{n+2}{2n+2}e_n \geq \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}$.
En simplifiant par $\frac{n+2}{2n+2} > 0$, on a obtient : $e_n \geq e_{n+1}$.

• On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, e_n \geq e_{n+1}}$$

b) La suite (e_n) est donc décroissante et comme elle est minorée par 0 (e_n est une probabilité), on peut conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (e_n) \text{ est convergente}}$$

4) a) On sait que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $e_n = \frac{n}{2n+2}e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}$.
En multipliant par $2n+2$, on obtient : $2(n+1)\,e_n = n\,e_{n-1} + (n+2)\,e_{n+1}$.
Comme $u_n = (n+1)\,e_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$, ce que l'on peut écrire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}}$$

b) On reconnaît que la suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 et son équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui a pour seule solution $r = 1$. On sait, d'après le cours, qu'il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu) \times 1^n = \lambda n + \mu$.

Comme $u_0 = 1 \times e_0 = 1$ et $u_1 = 2e_1$, on obtient le système : $\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 2e_1 \end{cases}$ d'où l'on déduit :

$$\lambda = 2e_1 - 1 \text{ et } \mu = 1$$

En remplaçant, on trouve :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (2e_1 - 1)\,n + 1}$$

c) On sait que $u_n = (n+1)\,e_n$ donc $e_n = \frac{u_n}{n+1}$. Par conséquent, en divisant par $n+1 \neq 0$ l'égalité obtenue à la question 4b), on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = (2e_1 - 1)\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on déduit de la relation ci-dessus : $2e_1 - 1 = \frac{n+1}{n}\ e_n - \frac{1}{n}$.

L'énoncé admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc après passage à la limite, on en déduit : $2e_1 - 1 = 0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} (2e_1 - 1) = 2e_1 - 1$).

Conclusion :

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{2}}$$

En remplaçant dans l'encadré plus haut, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = \frac{1}{n+1}}$$

Problème ....

1) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ donc la restriction de f à l'intervalle [–1, 1] est continue. Ainsi, les deux intégrales $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ et $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ existent.

Sur [0, 1], on a $f(x) = 1 - x$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$

On a donc : $\int_0^1 f(x)\,dx = (1 - \frac{1}{2}) - 0 = \frac{1}{2}$.

L'intervalle [–1, 1] est centré en 0 et, pour tout réel x de [–1, 1], on a :

$$f(-x) = 1 - |-x| = 1 - |x| = f(x)$$

Par conséquent, la restriction de f à [–1, 1] est paire et on obtient : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Pour résumer :

$$\boxed{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \text{ et } \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}}$$

b) • La fonction f est nulle donc positive sur]–∞, –1[et sur]1, +∞[.
Pour tout x de [–1, 1], on a $|x| \leq 1$, ce qui prouve que f est positive sur [–1, 1].
La fonction f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$.

• La fonction f est nulle donc continue sur]–∞, –1[et sur]1, +∞[.
Elle est également continue sur [–1, 1] comme différence de fonctions continues.
La fonction f est une continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en –1 et en 1.

• La relation de Chasles sur les intégrales et les calculs faits dans la première question prouvent que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$.

Comme f est nulle sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent et sont nulles. En regroupant les 4 intégrales, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Les trois points précédents prouvent que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ peut être considérée comme une fonction densité de probabilité}}$$

2) a) La fonction qui, à tout réel x associe $x\,f(x)$, est continue sur $[-1, 1]$ et nulle ailleurs, donc l'intégrale $\int_{-1}^{1} x\,f(x)\,dx$ existe et les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} x\,f(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ convergent et sont nulles. Tout ceci prouve que :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance}}$$

La fonction g, définie sur $[-1, 1]$ par $g(x) = x\,f(x)$ est impaire.

En effet, $g(-x) = -x(1 - |-x|) = -x\,(1 - |x|) = -g(x)$. On en déduit que $\int_{-1}^{1} x\,f(x)\,dx = 0$.

La relation de Chasles sur les intégrales convergentes donne alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = 0$.

$$\boxed{E(X) = 0}$$

b) De même, la fonction qui, à tout réel x associe $x^2 f(x)$, est continue sur $[-1, 1]$ et nulle ailleurs, donc l'intégrale $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx$ existe et les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} x^2 f(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ convergent et sont nulles.

Tout ceci prouve que :

$$\boxed{X \text{ possède un moment d'ordre } 2}$$

De plus, la fonction h, définie sur $[-1, 1]$ par $h(x) = x^2 f(x)$ est paire.

En effet : $h(-x) = (-x)^2(1 - |-x|) = x^2\,(1 - |x|) = h(x)$.

On en déduit que $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2 f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2 (1-x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1}(x^2 - x^3)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}.$$

La relation de Chasles sur les intégrales donne alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{6}$.

$$\boxed{E(X^2) = \frac{1}{6}}$$

La formule de Koenig-Huygens permet de finir le travail : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

On obtient alors :

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{6}}$$

3) Par définition, pour tout réel x, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

• Si $x \in]-\infty, -1[$, alors, pour tout t de $]-\infty, x]$, on a $f(t) = 0$ et $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

• Si $x \in [-1, 0]$, alors, pour tout t de $[-1, x]$, on a $f(t) = 1 + t$ et, comme pour tout t de $]-\infty, -1[$, on a $f(t) = 0$, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} (1+t)\,dt = \left[t+\dfrac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x}$, ce qui donne :

$F(x) = (x + \dfrac{x^2}{2}) - (-1 + \dfrac{1}{2})$, soit : $F(x) = \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2}$.

• Si $x \in]0, 1]$, alors, pour tout t de $[0, x]$, on a $f(t) = 1 - t$ et, comme pour tout t de $]-\infty, -1[$, on a $f(t) = 0$ et pour tout t de $[-1, 0]$, on a $f(t) = 1 + t$, on obtient :

$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{0}^{x} (1-t)\,dt = \left[t+\dfrac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[t-\dfrac{t^2}{2}\right]_{0}^{x}$, ce qui donne :

$F(x) = 0 - (-1 + \dfrac{1}{2}) + x - \dfrac{x^2}{2}$, soit : $F(x) = \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}$.

• Si $x \in]1, +\infty[$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt = 0 + 1 + 0 = 1$.

Pour résumer :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} \qquad \text{si } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} \qquad \text{si } 0 < x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}}$$

4) a) Comme $Y = |X|$, on sait que Y prend des valeurs positives. Par conséquent :

$$\boxed{\forall x < 0,\ F_Y(x) = 0}$$

b) Pour tout réel x positif, on a : $F_Y(x) = P(Y \le x) = P(|X| \le x) = P(-x \le X \le x)$.
On a donc :

$$\boxed{\forall x \ge 0,\ F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x)}$$

c) • Si x appartient à $[0, 1]$, alors $-x$ appartient à $[-1, 0]$ et on a, grâce à la question 3) :

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \text{ (même en 0) et } F_X(-x) = \frac{1}{2} + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} = \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}$$

En remplaçant dans $F_Y(x)$, on trouve : $\forall x \in [0, 1],\ F_Y(x) = \left(\dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2} - x + \dfrac{x^2}{2}\right) = 2x - x^2$.

• Si x appartient à $]1, +\infty[$, alors $-x$ appartient à $]-\infty, -1[$ et on a :

$$F_X(x) = 1 \text{ et } F_X(-x) = 0$$

En remplaçant dans $F_Y(x)$, on trouve : $\forall x \in]1, +\infty[,\ F_Y(x) = 1$

Bilan : $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2x - x^2 \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

F_Y est de classe C^1 sauf peut-être en 0 et en 1 donc on peut dériver sauf en 0 et en 1 :

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2 - 2x \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

En posant par exemple $g(0) = 2$ et $g(1) = 0$, on obtient finalement une densité g de Y :

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} 2(1-x) \text{ si } x \in [0, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

d) Les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x\, g(x)\, dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x\, g(x)\, dx$ convergent et sont nulles, puisque g est nulle sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$.

De plus, la fonction qui à tout réel x de $[0, 1]$ associe $x\,g(x)$ est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 xg(x)dx$ existe. Ainsi, on peut affirmer que Y possède une espérance et :

$E(Y = \int_0^1 xg(x)dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\,(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}).$

Finalement :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{3}}$$

Les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x^2\, g(x)\, dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x^2\, g(x)\, dx$ convergent et sont nulles, puisque g est nulle sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$.

De plus, la fonction qui à tout réel x de $[0, 1]$ associe $x^2\, g(x)$ est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 x^2\, g(x)\, dx$ existe. Ainsi, on peut affirmer que Y possède un moment d'ordre 2 et :

$E(Y^2) = \int_0^1 x^2\, g(x)dx = 2\int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\,(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}.$

Finalement, comme $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$, on obtient : $V(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$, soit :

$$\boxed{V(Y) = \frac{1}{18}}$$

5) a) On a $P(I > x) = P(\,[U > x] \cap [V > x]\,)$, et, par indépendance de U et V, on obtient :
$P(I > x) = P(U > x)\, P(V > x) = (1 - F_U(x))\,(1 - F_V(x))$.
On a donc $1 - F_I(x) = (1 - F_U(x))\,(1 - F_V(x))$, ce qui donne : $F_I(x) = 1 - (1 - F_U(x))\,(1 - F_V(x))$.

D'après le cours, on sait que $F_U(x) = F_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

En remplaçant, on trouve :

$$\boxed{F_I(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1-(1-x)^2 = 2x - x^2 \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}}$$

b) On peut effectivement conclure que :

$$\boxed{I \text{ suit la même loi que } Y}$$

6) Comme I_n prend la plus petite des valeurs prises par $X_1,...,X_n$, dire que la valeur prise par I_n est supérieure à *x*, c'est dire que les valeurs prises par $X_1,...,X_n$ sont toutes supérieures à *x* (sinon, si l'une de ces variables prenait une valeur inférieure ou égale à *x* alors, par définition du minimum, I_n prendrait aussi une valeur inférieure ou égale à *x*).
On a donc :

$$(I_n > x) = (X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap ... \cap (X_n > x)$$

On en déduit $P(I_n > x) = P([X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap ... \cap [X_n > x])$ et, par indépendance des variables X_i, on obtient : $P(I_n > x) = P(X_1 > x)P(X_2 > x)...P(X_n > x)$.
En notant F_n la fonction de répartition de I_n, on trouve :
$1 - F_n(x) = (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x))...(1 - F_{X_n}(x))$.
On en déduit : $F_n(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x))...(1 - F_{X_n}(x))$
Comme les variables X_i suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (1-x)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 < x \le 1 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-(1-x)^n\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x \le 1 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \le 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$.
Bilan : la suite de fonctions (F_n) converge vers la fonction *F* qui vaut 0 si *x* appartient à $]-\infty, 0]$ et qui vaut 1 si *x* appartient à $]0, +\infty[$. La fonction *F* coïncide, sauf en 0, avec la fonction de répartition d'une variable certaine égale à 0 donc :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers une variable certaine égale à 0}}$$

7) La déclaration de fonction complétée est la suivante :

```
Function y : real ;
Var   u, v : real ;
Begin
   Randomize ;
   u : = random ; v : = random ;
   If (u < v) then y : = u else y : = v ;
End ;
```