$$\boxed{\textbf{Corrigé}}$$

Exercice 1

1) a) On procède par récurrence.
Pour $n = 0$, comme $u_0 = 0$, on a bien $0 \le u_0 < 1$.
Si l'on suppose pour un entier naturel n fixé que $0 \le u_n < 1$, on a, par stricte croissance de la fonction "carré" sur $\mathbb{R}_+$: $0 \le u_n^2 < 1$. Dès lors, en ajoutant 1 à chaque membre et en divisant par 2, on obtient : $\frac{1}{2} \le u_{n+1} < 1$. Ceci implique bien sûr : $0 \le u_{n+1} < 1$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n < 1}$$

b) Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^{\ 2} + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^{\ 2} + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2}$.
Ceci montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \ge 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

c) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1), c'est donc une suite convergente. Comme la fonction $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a, en notant ℓ la limite de la suite (u_n) :
$\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2}$, soit $\ell^2 + 1 - 2\ell = 0$, ou encore $(\ell - 1)^2 = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

2) a) Pour tout entier naturel n, on est certain que v_n est non nul (car $u_n < 1$) et on a :

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{1}{1 - \frac{u_n^{\ 2} + 1}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2}{1 - u_n^{\ 2}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2 - (1 + u_n)}{1 - u_n^{\ 2}} = \frac{1}{1 + u_n}.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}}$$

b) D'après la question précédente, on a : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}$.

D'après le résultat admis, on sait que : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k} \right) = \frac{1}{2}$.

De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k} \right) = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_n} - 1$.

On obtient donc : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_n}-1\right)=\frac{1}{2}$. On peut écrire ceci sous la forme : $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\left(\frac{1}{v_n}-1\right)=1$.

En développant le membre de gauche et en arrangeant un peu, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2/n}{v_n}-\frac{2}{n}\right)=1$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$, on trouve : $\lim_{n\to+\infty}\frac{2/n}{v_n}=1$.

Ceci implique :

$$\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}}$$

c) Par définition de v_n, on en déduit : $1-u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Par définition d'un équivalent, on obtient : $1-u_n \underset{+\infty}{=} \frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})$

On peut alors écrire :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} 1-\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})}$$

3) a) Il suffit de "coller" à la définition de la suite (u_n).

Voici une version récursive :

```
Function u(n : integer) : real ;
   Begin
      If n = 0 then u : = 0 else u : = (sqr(u(n−1)) +1) / 2 ;
   End ;
```

Voici une version itérative :

```
Function u(n : integer) : real ;
Var   k : integer ;
      aux : real ;  {la variable aux contiendra les valeurs prises par u_k au cours de la boucle}
Begin
      aux : = 0 ;
      For k : = 1 to n do aux : = (sqr(aux) + 1) / 2 ;
      u : = aux ;
End ;
```

b) On utilise une boucle "repeat" qui prend fin lorsque $1-u_n<10^{-3}$.

Voici une version récursive :

```
Program Edhec2012 ;
Var n : integer ;
Function u(n : integer) : real ;
   Begin      If n = 0 then u : = 0 else u : = (sqr(u(n−1)) +1) / 2    ;   End ;
BEGIN
   n : = 0 ;
   Repeat n : = n+1 ; until 1 – u(n) < 1/1000 ;
   Writeln (n) ;
END.
```

Et voici une version itérative :

```
Program Edhec2012 ;
Var k, n : integer ; u : real ;
BEGIN
   n : = 0 ; u : = 0 ;
   Repeat n : = n+1 ; u : = (sqr(u) + 1) / 2 ; until 1-u < 1/1000 ;
   Writeln (n) ;
END.
```

Exercice 2

1) Comme f est diagonalisable, il existe, par définition, une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle sa matrice D est diagonale. Dès lors, la matrice de f^2 dans cette base est D^2 qui est aussi diagonale, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f^2 \text{ est diagonalisable}}$$

Remarque. Moins élégamment, on pouvait écrire que, comme f est diagonalisable, alors en désignant par A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $A = PDP^{-1}$.

On a alors : $A^2 = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

Comme la matrice D^2 est diagonale, on en déduit que A^2 est diagonalisable, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f^2 \text{ est diagonalisable}}$$

2) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{A^4 = I}$$

Ceci prouve que le polynôme $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A.

Comme on a $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$ et comme $X^2 + 1 > 0$, les racines de ce polynôme sont celles de $X^2 - 1$, à savoir -1 et 1, ce qui montre que :

$$\boxed{\text{Les seules valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -1 \text{ et } 1}$$

b) En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 2x-6y+4z=0 \\ 3x-8y+5z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+3L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ -2y+2z=0 \\ -2y+2z=0 \end{cases}.$$

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $u = (1,1,1)$ n'est pas nul donc la famille $\big((1,1,1)\big)$ est libre et, comme elle engendre le sous-espace propre de g associé à la valeur propre 1, c'est une base de ce sous-espace propre.
Conclusion :

$$\boxed{\big((1,1,1)\big) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(g - Id)}$$

c) Avec le même genre de technique, on a :

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-4y+4z=0 \\ 3x-8y+7z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -8y+6z=0 \\ -14y+10z=0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -8y+6z=0 \\ -14y+10z=0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow 4L_2-7L_{11}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -8y+6z=0 \\ -2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$. On obtient donc :

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y=z=0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g + Id) = \{(0,0,0)\}}$$

d) L'étude précédente montre que -1 n'est pas valeur propre de g et que 1 est valeur propre de g. Comme -1 et 1 sont les deux valeurs propres possibles de g, on en déduit que 1 est la seule valeur propre de g.
Comme la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est différente de 3 (elle est égale à 1), on peut conclure :

$$\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

3) a) $$A^2X = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+2z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-y+z=0.$$

On trouve donc : $A^2X = -X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que Ker($g^2 + Id$) est engendré par la famille $\big((1,0,-1),(0,1,1)\big)$. Comme cette famille est libre car composée de deux vecteurs non proportionnels, c'est une base de Ker($g^2 + Id$).

En posant $v = (1,0,-1)$ et $w = (0,1,1)$, on en conclut que :

$$\boxed{(v,w) \text{ est une base de Ker}(g^2 + Id)}$$

Remarque. On aurait pu faire un autre choix en écrivant :

$A^2X = -X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ceci donnait la famille $\big((1,1,0),(-1,0,1)\big)$ comme base de Ker($g^2 + Id$).

b) Montrons que (u, v, w) est une famille libre.
Soit donc a, b et c trois réels tels que $a\,u + b\,v + c\,w = 0$. En remplaçant u, v et w par $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ et $(0,1,1)$, on trouve : $(a+b,\ a+c,\ a-b+c) = (0,0,0)$.

On obtient alors le système équivalent : $\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$. Avec la transformation $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$,

on a : $\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ -b=0 \end{cases}$. On obtient ensuite : $b = 0$, puis $a = 0$ et enfin $c = 0$.

La famille (u, v, w) est libre. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et comme la famille (u, v, w) contient 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on peut conclure :

$$\boxed{(u,\ v,\ w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

c) • On a : $g^2(u) = g\big(g(u)\big) = g(u) = u$, puisque u appartient à Ker($g - Id$).

• On sait depuis la question 3a) que v et w appartiennent à Ker($g^2 + Id$) donc :
$g^2(v) = -v$ et $g^2(w) = -w$.

La matrice de g^2 dans la base (u, v, w) est donc :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Comme la matrice B est diagonale, on a la preuve que g^2 est diagonalisable (alors que g ne l'est pas).

Remarque. Pour trouver $g^2(u)$, $g^2(v)$ et $g^2(w)$, on pouvait effectuer les calculs matriciels suivants :

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc : $g^2(u) = u$.

$$A^2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\text{ donc : } g^2(v)=-v.$$

$$A^2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\text{ donc : } g^2(w)=-w.$$

Exercice 3

1) Notons tout d'abord que $T_n(\Omega)=[\![1,n]\!]$, puisque l'on peut obtenir un "Pile" dès le premier lancer ou bien être obligé de lancer la pièce n fois, toutes les situations intermédiaires étant envisageables.

a) L'événement $(T_n=1)$ est réalisé si et seulement si l'on obtient "Pile" au premier lancer. On a donc : $P(T_n=1)=p$.

Pour tout k appartenant à $[\![2,\,n-1]\!]$, $(T_n=k)$ est réalisé si et seulement si on a obtenu "Face" $k-1$ fois et "Pile" au $k^{\text{ème}}$ lancer. On a donc :

$$(T_n=k)=\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}F_i\right)\cap P_k$$

On en déduit : $P(T_n=k)=P(F_1)P_{F_1}(F_2)\ldots P_{F_1\cap\ldots\cap F_{k-2}}(F_{k-1})P_{F_1\cap\ldots\cap F_{k-1}}(P_k)$

Tant que l'on obtient "face", on relance la pièce dans les mêmes conditions donc :

$$\forall k\in[\![2,\,n-1]\!],\ P(T_n=k)\ =\ q^{k-1}p$$

Cette formule étant valable pour $k=1$ (elle donne bien $P(T_n=1)=p$), on conclut :

$$\boxed{\forall k\in[\![1,\,n-1]\!],\ P(T_n=k)\ =\ q^{k-1}p}$$

b) L'événement $(T_n=n)$ est réalisé si, et seulement si, on obtient $n-1$ "Faces" durant les n premiers lancers (peu importe ce que donne le $n^{\text{ème}}$ lancer, il aura lieu).

On a donc : $(T_n=n)=\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n-1}F_i$. Comme dans la question 1a), on obtient :

$$\boxed{P(T_n=n)\ =\ q^{n-1}}$$

Remarque. On trouvait le même résultat en écrivant, moins synthétiquement :

$$(T_n=n)=\left(\bigcap_{i=1}^{n}F_i\right)\cup\left(\left[\bigcap_{i=1}^{n-1}F_i\right]\cap P_n\right)$$

c) On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)=\sum_{k=1}^{n-1}P(T_n=k)+P(T_n=n)$. On en déduit :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)=\sum_{k=1}^{n-1}q^{k-1}p+q^{n-1}=p\sum_{i=0}^{n-2}q^i+q^{n-1}$. Comme q est différent de 1, on obtient :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)=p\frac{1-q^{n-1}}{1-q}+q^{n-1}=1-q^{n-1}+q^{n-1}$.

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1}$$

d) La variable aléatoire T_n est finie donc elle possède une espérance et on a :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k\,P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p + n\,q^{n-1} = p\sum_{k=1}^{n-1} k\,q^{k-1} + n\,q^{n-1}$$

Première méthode. Considérons la fonction *f* définie sur]0, 1[par :

$$f(q) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

La fonction *f* est dérivable (fonction polynomiale) et on a : $f'(q) = \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}$ (le terme correspondant à $k=0$ dans $f(q)$ a une dérivée nulle car il vaut 1).

Comme $f(q) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$, on a aussi : $(1-q)f(q) = 1-q^n$.

En dérivant les deux membres, on obtient : $(1-q)f'(q) - f(q) = -nq^{n-1}$.

On déduit : $(1-q)f'(q) = f(q) - nq^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q} - nq^{n-1} = \dfrac{1+(n-1)q^n - nq^{n-1}}{1-q}$.

En divisant par $1-q$, on trouve : $f'(q) = \dfrac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1}{(1-q)^2}$.

On en déduit : $\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} = \dfrac{(n-1)q^n - n\,q^{n-1}+1}{(1-q)^2}$.

On a alors successivement :

$$E(T_n) = p\,\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1}{(1-q)^2} + nq^{n-1} = (1-q)\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1}{(1-q)^2} + nq^{n-1}.$$

$$E(T_n) = \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1}{1-q} + nq^{n-1} = \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1+nq^{n-1}(1-q)}{1-q}.$$

$$E(T_n) = \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1+nq^{n-1}-nq^n}{1-q} = \frac{nq^n - q^n - nq^{n-1}+1+nq^{n-1}-nq^n}{1-q}.$$

On trouve bien :

$$\boxed{E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Deuxième méthode. On écrit :

$$E(T_n) = (1-q)\sum_{k=1}^{n-1} k\,q^{k-1} + n\,q^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^k + n\,q^{n-1}$$

Avec le changement d'indice $i = k-1$ dans la première somme, on obtient :

$$E(T_n) = \sum_{i=0}^{n-2} (i+1)\,q^i - \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^k + n\,q^{n-1}$$

En scindant la première somme, on a : $E(T_n) = \sum_{i=0}^{n-2} i\,q^i + \sum_{i=0}^{n-2} q^i - \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^k + n\,q^{n-1}$.

Les première et troisième sommes se simplifient et il reste :

$$E(T_n)=\sum_{i=0}^{n-2}q^i-(n-1)q^{n-1}+nq^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-2}q^i+q^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}q^i=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

2) a) Notons que $X_n(\Omega)=\{0,1\}$, puisque lors des n premiers lancers, soit on ne fait que des "Faces" et $(X_n=0)$ est réalisé, soit on obtient un "Pile", ce qui arrête le jeu, et $(X_n=1)$ est réalisé. On a $(X_n=0)=\bigcap_{i=1}^{n}F_i$ et, avec encore le même argument que dans la question 1a), on obtient : $P(X_n=0)=q^n$.

On en déduit : $P(X_n=1)=1-q^n$.

$$\boxed{X_n \text{ suit la loi } \mathcal{B}(1-q^n)}$$

b) D'après le cours, X_n a une espérance et :

$$\boxed{E(X_n)=1-q^n}$$

3) On a $Y_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$, puisque l'on peut, au mieux, obtenir un "Pile" dès le premier lancer et Y_n prend la valeur 0, ou, au pire, n'obtenir que des "Faces" et Y_n prend la valeur n, toutes les situations intermédiaires étant, ici aussi, envisageables.

a) • L'événement $(Y_n=0)$ est réalisé si, et seulement si, on n'obtient aucun "Face", c'est-à-dire si, et seulement si, on obtient "Pile" au premier lancer. On a donc : $P(Y_n=0)=p$.

• Pour tout k de $[\![1,\ n-1]\!]$, l'événement $(Y_n=k)$ est réalisé si, et seulement si, on obtient k "Faces" lors des k premiers lancers, suivis d'un "Pile" pour garantir que l'on a obtenu k "Faces", **et pas plus**. On a donc : $(Y_n=k)=\left(\bigcap_{i=1}^{k}F_i\right)\cap P_{k+1}$.

Toujours comme dans la question 1a), on obtient : $P(Y_n=k)=q^k p$. Comme cette égalité donne bien $P(Y_n=0)=p$ pour $k=0$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall k\in[\![0,\ n-1]\!],\ P(Y_n=k)=q^k p}$$

b) L'événement $(Y_n=n)$ est réalisé si, et seulement si, on obtient n "Faces" lors des n premiers lancers. On a donc : $(Y_n=n)=\bigcap_{i=1}^{n}F_i$. De la même façon encore (tant que l'on obtient "face", on relance la pièce dans les mêmes conditions), on obtient :

$$\boxed{P(Y_n=n)=q^n}$$

c) Le nombre total de lancers est égal au nombre de "Pile" ajouté au nombre de "Face". Par conséquent, on a :

$$\boxed{X_n+Y_n=T_n}$$

Par linéarité de l'espérance, on trouve : $E(X_n)+E(Y_n)=E(T_n)$.

On a donc : $E(Y_n)=E(T_n)-E(X_n)=\dfrac{1-q^n}{1-q}-(1-q^n)=\dfrac{1-q^n-(1-q^n)(1-q)}{1-q}$

Pour finir, on trouve :

$$\boxed{E(Y_n)=\frac{q\,(1-q^n)}{1-q}}$$

4) D'après la question 1a), on a, pour tout k fixé dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel n strictement supérieur à k : $P(T_n=k) \;=\; q^{k-1}p$.

On peut faire tendre n vers $+\infty$ et on trouve :

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n=k) \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty} q^{k-1}p = q^{k-1}p.$

En conclusion, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T suivant la loi géométrique de paramètre p.

5) Tant que l'on n'a pas obtenu de "Pile" et que l'on n'a pas lancé la pièce n fois, on rejoue et la variable T_n augmente d'une unité. À chaque nouveau lancer, si l'on obtient un "Face", Y_n augmente d'une unité, sinon c'est X_n qui augmente d'une unité et prend définitivement la valeur 1.

```
Program EDHEC2012 ;
   Var   n, t, x, y : integer ;
         p : real ;
Begin
   Randomize ; t : = 0 ; x : = 0 ; y : = 0 ; Readln(n, p) ;
   While (x = 0) and (t < n) do   begin  t : = t+1
                                  If random > p  then  y : = y+1   else   x : = 1 ;
                                  End ;
   Writeln (t, x, y) ;
End.
```

Remarque. La dernière instruction "x : = 1 ;" peut être remplacée par "x : = x + 1 ;", ce qui revient au même.

Problème

1) a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0.

De plus : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\lambda\left|-x\right|e^{-\lambda(-x)^2}=\lambda\left|x\right|e^{-\lambda x^2}=f(x)$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire}}$$

b) Pour tout réel x positif, on a $f(x)=\lambda x\,e^{-\lambda x^2}$, ce qui montre que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout réel A positif, on a : $\displaystyle\int_0^A f(x)\,dx=\int_0^A \lambda x\,e^{-\lambda x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\Big[e^{-\lambda x^2}\Big]_0^A=-\frac{1}{2}\Big(e^{-\lambda A^2}-1\Big).$

Comme λ est strictement positif, on a : $\lim_{A\to+\infty} e^{-\lambda A^2} = 0$. Ceci prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}}$$

c) La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction *f* est positive ($\lambda > 0$, $|x| \geq 0$ et $e^{-\lambda x^2} > 0$).
De plus, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et *f* est paire donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge également et on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire } X}$$

2) a) Pour tout réel x positif, on a $x\,f(x) = \lambda x^2\, e^{-\lambda x^2}$, ce qui montre que la fonction $x \mapsto x\,f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (produit de fonctions continues).
De plus, on a : $\forall x > 0,\ x^2\left(x\,f(x)\right) = \lambda x^4\, e^{-\lambda x^2} = \frac{1}{\lambda}\lambda^2 x^4\, e^{-\lambda x^2} = \frac{1}{\lambda}(\lambda x^2)^2\, e^{-\lambda x^2}$.
$\lim_{x\to+\infty} (\lambda x^2)^2\, e^{-\lambda x^2} = \lim_{z\to+\infty} z^2 e^{-z} = 0$ (par croissances comparées et parce que $\lambda>0$) donc :
$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(x\,f(x)\right) = 0$. Ceci prouve que : $x\,f(x) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$.
On sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (intégrale de Riemann de paramètre 2 > 1) donc, grâce au critère de négligeabilité (pour les intégrales de fonctions continues et positives), l'intégrale $\int_1^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ converge également. Comme l'intégrale $\int_0^1 x\,f(x)\,dx$ est définie (intégrale d'une fonction continue sur un segment), on peut conclure :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx \text{ converge}}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = -x\,f(-x) = -\lambda\, x\left|-x\right| e^{-\lambda(-x)^2} = -\lambda\, x\left|x\right| e^{-\lambda x^2} = -x\,f(x) = -g(x)$.
La fonction $g : x \mapsto x\,f(x)$ est donc impaire, et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ converge, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\,dx$ converge également.
La relation de Chasles prouve que $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ est convergente et que $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = 0$.
En conclusion, *X* possède une espérance et :

$$\boxed{E(X) = 0}$$

3) a) Pour tout réel x positif, on a $x^2 f(x) = \lambda x^3 e^{-\lambda x^2}$, ce qui montre que la fonction $h : x \mapsto x^2 f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout réel A positif, on a : $\int_0^A x^2 f(x)\,dx = \int_0^A x^2 \times \lambda x e^{-\lambda x^2}\,dx$.

On pose $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \lambda x e^{-\lambda x^2}$.

On a donc $u'(x) = 2x$ et on peut choisir $v(x) = -\frac{1}{2} e^{-\lambda x^2}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc l'intégration par parties est licite et donne :

$$\int_0^A x^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\Big[x^2 e^{-\lambda x^2}\Big]_0^A + \int_0^A x e^{-\lambda x^2}\,dx = -\frac{1}{2} A^2 e^{-\lambda A^2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x^2}\,dx.$$

$$\int_0^A x^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{2} A^2 e^{-\lambda A^2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^A f(x)\,dx.$$

Comme $\lambda > 0$, on a $\lim_{A \to +\infty} A^2 e^{-\lambda A^2} = 0$, par croissances comparées, comme à la question 2a).

De plus, $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ est convergente, et, après passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2\lambda}}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = (-x)^2 f(-x) = \lambda x^2 \left| -x \right| e^{-\lambda(-x)^2} = \lambda x^2 \left| x \right| e^{-\lambda x^2} = x^2 f(x) = h(x)$.

La fonction $h : x \mapsto x^2 f(x)$ est donc paire, et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^0 x^2 f(x)\,dx$ converge également.

La relation de Chasles prouve que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ est convergente, ce qui signifie que X possède un moment d'ordre 2.

Comme h est paire, on a de plus : $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}$.

Pour finir : $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{1}{\lambda} - 0$.

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

4) a) Comme $Y = X^2$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, ce qui montre que : $\forall x < 0$, $F_Y(x) = 0$.

Pour tout réel x positif ou nul, on a : $F_Y(x) = P(Y \le x) = P(X^2 \le x) = P(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x})$.

En notant F_X la fonction de répartition de X, on obtient :

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

b) Première méthode.

On déduit de ce qui précède que :

$\forall x \geq 0$, $F_Y(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)\,dt = 2\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,dt$, cette dernière égalité provenant de la parité de *f*.

En remplaçant, on trouve : $\forall x \geq 0$, $F_Y(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \lambda t\, e^{-\lambda t^2}\,dt = \left[-e^{-\lambda t^2} \right]_0^{\sqrt{x}} = 1 - e^{-\lambda x}$.

Pour résumer : $F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$. On reconnaît que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Comme l'énoncé le demande, on obtient une densité f_Y de Y en dérivant (sauf en 0) la fonction F_Y et en posant, par exemple, $f_Y(0) = \lambda$, ce qui donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Deuxième méthode.

La fonction F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction racine carrée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition et soustraction, F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme F_Y coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, elle est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$.

On obtient alors une densité f_Y de Y en dérivant F_Y, sauf en 0, puis en donnant une valeur arbitraire positive à f_Y en 0. On a : $F_Y{}'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} f(-\sqrt{x}) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Comme *f* est paire, il reste : $F_Y{}'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

En remplaçant, on trouve : $F_Y{}'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \lambda \left| \sqrt{x} \right| e^{-\lambda x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

En simplifiant (car $\left| \sqrt{x} \right| = \sqrt{x}$), on a enfin : $F_Y{}'(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Il suffit de poser $f_Y(0) = \lambda$ pour obtenir :

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

On conclut que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c) D'après le cours, on sait que $E(Y)=\frac{1}{\lambda}$, et comme $Y=X^2$, on a $E(X^2)=\frac{1}{\lambda}$. Comme $E(X)=0$, on retrouve alors :

$$\boxed{V(X)=\frac{1}{\lambda}}$$

5) a) En notant F_W et F_U les fonctions de répartition de *W* et *U*, on a, pour tout réel x :

$F_W(x)=P(W\le x)=P(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)\le x)=P(\ln(1-U)\ge -\lambda x)=P(1-U\ge e^{-\lambda x})$.

La dernière égalité provient du fait que la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$.

On a donc : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_W(x)=P(U\le 1-e^{-\lambda x})=F_U(1-e^{-\lambda x})$.

La fonction exponentielle est à valeurs dans $]0,+\infty[$ donc : $1-e^{-\lambda x}<1$.

• Si $x\ge 0$, alors, comme $\lambda>0$, on a : $e^{-\lambda x}\le 1$ et $1-e^{-\lambda x}\ge 0$.

On en déduit que : $0\le 1-e^{-\lambda x}<1$. On peut alors remplacer et obtenir : $F_W(x)=1-e^{-\lambda x}$.

• Si $x<0$, alors, comme $\lambda>0$, on a : $e^{-\lambda x}>1$ et $1-e^{-\lambda x}<0$. On en déduit que : $F_W(x)=0$.

On a donc le résultat :

$$\boxed{W \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda}$$

b) On sait que $Y=X^2$ donc on a : $|X|=\sqrt{Y}$. Comme la loi de *Y* est la même que celle de *W* (que l'on sait simuler d'après la question précédente), on peut maintenant écrire la fonction simulant la loi de $|X|$:

```
function vax(lambda : real) : real ;
var y : real ;
Begin
y : = (–1/lambda) * ln(1 – random) ;
vax : = sqrt(y) ;
End ;
```

c) On a vu à la question 1b) que : $P(X\ge 0)=\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

Par parité de *f*, on sait aussi que $P(X\le 0)=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

On a donc :

$$\boxed{P(X\ge 0)=P(X\le 0)}$$

Ce qui précède s'écrit aussi : $P(X=|X|)=P(X=-|X|)=\frac{1}{2}$. Pour simuler *X*, il suffit donc de simuler $|X|$, puis de traduire le fait qu'il y a une chance sur 2 que ce que l'on a simulé soit *X* (ou –*X*).

```
function x(lambda: real) : real ;
var y : real ;
Begin
```

```
y : = (–1/lambda) * ln(1 – random) ;
If random(2) = 1 then   x : = sqrt(y)    else   x : = –sqrt(y) ;
End ;
```

6) a) On a : $\forall x \in]0,+\infty[$, $L(\lambda)=\prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k)=\prod_{k=1}^{n}\lambda\, e^{-\lambda x_k}$.

Grâce aux propriétés de la fonction exponentielle, on trouve :
$L(\lambda)=\lambda\, e^{-\lambda x_1}\lambda\, e^{-\lambda x_2}\ldots\lambda\, e^{-\lambda x_n}=\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n)}$, ce qui donne :

$$\boxed{L(\lambda)=\lambda^n\, e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\ln\left(L(\lambda)\right)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k}$$

b) On a : $\varphi(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k$.

La fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et : $\varphi'(\lambda)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{n-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k}{\lambda}$.

On a donc : $\varphi'(\lambda)\geq 0 \Leftrightarrow n-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k\geq 0\Leftrightarrow \lambda\leq\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}x_k}$ (aucun risque à écrire ceci puisque les x_k sont supposés strictement positifs).

On conclut :

$$\boxed{\varphi \text{ admet un maximum, atteint en } z=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}x_k}}$$

D'après ce qui précède, z est le réel en lequel la fonction $\ln L$ atteint son maximum. Comme $(\ln L)'=\frac{L'}{L}$ et comme L est une fonction positive, $(\ln L)'$ et L' ont même signe. Par conséquent, $\ln L$ et L ont les mêmes variations, ce qui prouve que:

$$\boxed{z \text{ est le réel en lequel la fonction } L \text{ atteint son maximum}}$$

7) a) Comme $Z_n=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}Y_k}$, comme $\sum_{k=1}^{n}Y_k$ a pour densité f_n, et comme $t\mapsto\frac{n}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, alors, grâce au théorème de transfert, Z_n possède une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{n}{t}f_n(t)\,dt$ converge (puisque Z_n ne prend que des valeurs positives).

Pour tout réel t positif, on a :

$$\frac{n}{t}f_n(t)=\frac{n}{t}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}=n\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-2}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\frac{\lambda n}{n-1}\times\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}t^{n-2}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\frac{\lambda n}{n-1}f_{n-1}(t).$$

Comme n est supérieur ou égal à 2, la fonction f_{n-1} est une densité donc $\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt=1$.

Ceci prouve que $\int_0^{+\infty}\frac{n}{t}f_n(t)\,dt$ converge et l'on a de plus : $\int_0^{+\infty}\frac{n}{t}f_n(t)\,dt=\frac{\lambda n}{n-1}\times 1$.

On a bien :

$$\boxed{E(Z_n)=\frac{n}{n-1}\lambda}$$

b) En posant $Z_n'=\frac{n-1}{n}Z_n$, on a, par linéarité de l'espérance :

$E(Z_n')=\frac{n-1}{n}E(Z_n)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n-1}\lambda=\lambda$.

$$\boxed{Z_n'=\frac{n-1}{n}Z_n \text{ est un estimateur sans biais de } \lambda}$$