Option ES

Corrigé EDHEC 2011

Exercice 1..

1) a) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$ et pour tout t de $[0, x]$, on a, par croissance de la fonction exponentielle : $1 \le e^t \le e^x$. En ajoutant 1, on obtient :
$2 \le e^t + 1 \le e^x + 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $[2, +\infty[$, on trouve :

$$\boxed{\frac{1}{e^x+1} \le \frac{1}{e^t+1} \le \frac{1}{2}.}$$

b) En multipliant par t (avec $t \ge 0$), il vient : $\dfrac{t}{e^x+1} \le \dfrac{t}{e^t+1} \le \dfrac{t}{2}$.
On intègre ces fonctions continues entre 0 et x (avec $x \ge 0$) et on a :
$\dfrac{1}{e^x+1}\displaystyle\int_0^x t\,dt \le \int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt \le \frac{1}{2}\int_0^x t\,dt$. Ceci s'écrit : $\dfrac{1}{e^x+1}\times\dfrac{x^2}{2} \le \displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt \le \frac{x^2}{4}$.
En multipliant par $\dfrac{2}{x^2}$, qui est positif, on a finalement :

$$\boxed{\frac{1}{e^x+1} \le f(x) \le \frac{1}{2}.}$$

c) Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2}$, on a, par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.
De plus, on sait que $f(0) = \dfrac{1}{2}$, ce qui permet de conclure que :

$\boxed{f \text{ est continue à droite en } 0.}$

2) a) La fonction h qui à x associe $\dfrac{x}{e^x+1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$) donc elle admet des primitives qui sont toutes de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Comme la fonction qui à tout x de $]0, +\infty[$ associe $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt$, est une primitive de h, on en déduit qu'elle est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Par ailleurs la fonction qui à tout x de $]0, +\infty[$ associe $\dfrac{2}{x^2}$ est une fonction rationnelle bien définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

En tant que produit de deux fonctions de classe C^1 sur $]\,0, +\infty\,[$, la fonction f est également de classe C^1 sur $]\,0, +\infty\,[$.

Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \dfrac{-4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt + \frac{2}{x^2}\times\frac{x}{e^x+1}$.

En factorisant par $\dfrac{-4}{x^3}$, on trouve : $f'(x) = \dfrac{-4}{x^3}\left(\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt - \frac{x^2}{2(e^x+1)}\right)$

En posant $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt - \frac{x^2}{2(e^x+1)}$, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in\,]\,0, +\infty\,[\;;\; f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x).}$$

b) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, en particulier, dérivable sur $]\,0, +\infty\,[$ comme différence de deux fonctions dérivables et on a :

$$g'(x) = \frac{x}{e^x+1} - \frac{1}{2}\times\frac{2x(e^x+1)-x^2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2x(e^x+1)}{2(e^x+1)^2} - \frac{2x(e^x+1)-x^2e^x}{2(e^x+1)^2}.$$

Après simplification, on trouve : $g'(x) = \dfrac{x^2e^x}{2(e^x+1)^2}$. On constate que $g'(x) > 0$ sur $]\,0, +\infty\,[$, donc g est croissante sur $]\,0, +\infty\,[$.

Comme $g(0) = 0$, on en déduit que g est strictement positive sur $]\,0, +\infty\,[$.

Pour finir, $\dfrac{-4}{x^3}$ est strictement positif sur $]\,0, +\infty\,[$, donc, par produit, $f'(x)$ est strictement négative sur $]\,0, +\infty\,[$.

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

3) a) Pour tout réel t positif, on a : $1 - \dfrac{t}{e^t+1} = \dfrac{e^t+1-t}{e^t+1}$. Il reste à étudier le signe de e^t+1-t.

En posant $k(t) = e^t+1-t$, la fonction k est bien sûr dérivable et on a : $k'(t) = e^t - 1$. Comme t est positif, on a $e^t \geq 1$, d'où : $\forall t \in [\,0, +\infty\,[$, $k'(t) \geq 0$. La fonction k est donc croissante sur $[0, +\infty\,[$ et, comme $k(0) = 2$, on est certain que : $\forall t \in [\,0, +\infty\,[$, $k(t) \geq 2 > 0$.

On en déduit que : $\forall t \in [\,0, +\infty\,[$, $\dfrac{e^t+1-t}{e^t+1} \geq 0$. Ceci prouve bien que :

$$\boxed{\forall t \in [\,0, +\infty\,[,\; \frac{t}{e^t+1} \leq 1.}$$

b) En intégrant ces fonctions continues entre 0 et x (avec $x \geq 0$), on obtient :

$\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt \leq x$. En multipliant par $\dfrac{2}{x^2}$, qui est positif, on a finalement : $f(x) \leq \dfrac{2}{x}$.

La partie gauche de l'encadrement obtenu à la question 1a) permet d'obtenir :

$\dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$. Comme $\dfrac{1}{e^x+1}$ est positif, on peut élargir en écrivant : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, on obtient, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Exercice 2..

1) a) Pour montrer que f est une application linéaire, on doit vérifier que, pour tout couple (P, Q) de fonctions polynomiales de E et pour tout réel λ, on a : $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.
Par définition de f, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(f(\lambda P+Q)\big)(x) = 2x\big(\lambda P+Q\big)(x) - (x^2-1)\big(\lambda P+Q\big)'(x)$.
Par définition de l'addition et du produit d'une fonction par un réel et par linéarité de la dérivation, on trouve :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(\lambda P+Q)\big)(x) &= 2x\big(\lambda P(x)+Q(x)\big) - (x^2-1)\big(\lambda P'(x)+Q'(x)\big).\\ &= \lambda\, 2x\,P(x) + 2xQ(x) - \lambda(x^2-1)\,P'(x) - (x^2-1)Q'(x).\\ &= \lambda\big(2xP(x)-(x^2-1)P'(x)\big) + \big(2xQ(x)-(x^2-1)Q'(x)\big).\\ &= \lambda\big(f(P)\big)(x) + \big(f(Q)\big)(x)\end{aligned}$$

Ceci prouve bien que : $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est linéaire.}}$$

b) Avec $P(x) = a+bx+cx^2$, on a : $P'(x) = b+2cx$.
En remplaçant dans la définition, on obtient :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $\big(f(P)\big)(x) = 2x(a+bx+cx^2) - (x^2-1)(b+2cx)$.
Après développement et simplification, on obtient :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \big(f(P)\big)(x) = b+2(a+c)x+bx^2.}$$

On constate que $f(P)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2, ce qui, par définition de l'espace vectoriel E, montre que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

c) Pour déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$, il suffit de calculer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
On a :
- $e_0(x) = 1 = 1+0x+0x^2$ donc, en appliquant la relation trouvée à la question 1c) avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$, on trouve : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\big(f(e_0)\big)(x) = 2x$.
Bilan : $f(e_0) = 2\,e_1 = 0\,e_0 + 2\,e_1 + 0\,e_2$.
- $e_1(x) = x = 0+1x+0x^2$ donc, en appliquant la relation trouvée à la question 1c) avec $a = 0$, $b = 1$ et $c = 0$, on trouve : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\big(f(e_1)\big)(x) = 1+x^2$.
Bilan : $f(e_1) = e_0 + e_2 = 1\,e_0 + 0\,e_1 + 1\,e_2$.
- $e_2(x) = x^2 = 0+0x+1x^2$ donc, en appliquant la relation trouvée à la question 1c) avec $a = 0$, $b = 0$ et $c = 1$, on trouve : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\big(f(e_2)\big)(x) = 2x$.
Bilan : $f(e_2) = 2\,e_1 = 0\,e_0 + 2\,e_1 + 0\,e_2$.

Les colonnes de la matrice A sont les coordonnées de $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a donc :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2) a) Par définition, on a : $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}\,(f(e_0), f(e_1), f(e_2)\,) = \mathrm{vect}\,(2\,e_1, e_0 + e_2\,, 2\,e_1)$.
Comme deux des vecteurs de cette famille génératrice de $\mathrm{Im}\,f$ sont égaux et proportionnels à e_1, il reste :

$$\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}\,(e_1, e_0 + e_2).}$$

Les vecteurs e_1 et $e_0 + e_2$ ne sont pas proportionnels (sinon, il existerait, par exemple, un réel a tel que $e_1 = a(e_0 + e_2)$, soit $e_1 - ae_0 - ae_2 = 0$, et la famille (e_0, e_1, e_2) serait liée, ce qui n'est pas le cas).
Par conséquent, la famille $(e_1, e_0 + e_2)$ est libre et comme elle engendre $\mathrm{Im} f$, c'est une base de $\mathrm{Im} f$.
On en déduit :

$$\boxed{\dim(\,\mathrm{Im}\,f\,) = 2.}$$

b) Le théorème du rang s'écrit : $\dim(\,\mathrm{Ker} f\,) + \dim(\,\mathrm{Im} f\,) = \dim E$.
Comme $\dim e = 3$ et $\dim(\,\mathrm{Im} f\,) = 2\mathrm{n}$, on en déduit que : $\dim(\,\mathrm{Ker} f\,) = 1$.
Ainsi, pour déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$, il suffit de trouver un vecteur non nul appartenant à $\mathrm{Ker} f$.
On remarque alors que, d'après la question 1c), on a : $f(e_0) = f(e_2)$.
Par linéarité de f, on en déduit que $f(e_0 - e_2) = 0$, ce qui prouve que : $e_0 - e_2 \in \mathrm{Ker} f$.
Le vecteur $e_0 - e_2$ n'est pas nul donc :

$$\boxed{\text{La famille } (e_0 - e_2) \text{ est une base de } \mathrm{Ker} f.}$$

3) a) Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. La transformation $L_1 \leftrightarrow L_2$ donne :

$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. La transformation $L_2 \leftarrow 2L_2 + \lambda L_1$ donne :

$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. La transformation $L_2 \leftrightarrow L_3$ donne :

$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}$. Avec la transformation $L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda^2)L_1$, on obtient une réduite de Gauss de $A - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 4\lambda-\lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins de ses pivots est nul, donc, si et seulement si : $4\lambda-\lambda^3=0$.

Les valeurs propres de A sont donc les réels λ solutions de $4\lambda-\lambda^3=0$, c'est-à-dire solutions de : $\lambda(4-\lambda^2)=0$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont : } -2,\ 0 \text{ et } 2.}$$

b) Comme l'espace E est de dimension 3 et que A (et f aussi) possède trois valeurs propres distinctes, on peut affirmer (c'est une condition suffisante) que :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

• On connaît déjà le sous-espace propre de f associé à la valeur 0, c'est $\mathrm{Ker} f$.
Cherchons les deux autres que l'on note $E_2(f)$ et $E_{-2}(f)$, associés respectivement aux valeurs propres 2 et –2.

• Pour déterminer $E_2(f)$, on résout $(A-2I)X=0$, en utilisant la réduite de Gauss obtenue à la question précédente, ce qui donne, en posant $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 2a-2b+2c=0 \\ b-2c=0 \end{cases}$.

On obtient assez vite : $b=2c$ et $a=c$. On en déduit : $X=\begin{pmatrix} c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre $E_2(f)$ est donc engendré par la fonction dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont 1, 2 et 1, c'est-à-dire par le vecteur $e_0+2e_1+e_2$ (c'est la fonction qui à x associe $1+2x+x^2$).

$$\boxed{E_2(f)=\mathrm{vect}\,(e_0+2e_1+e_2).}$$

• Pour déterminer $E_{-2}(f)$, on résout $(A+2I)X=0$, en utilisant la réduite de Gauss obtenue à la question précédente, ce qui donne, en posant $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 2a+2b+2c=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$.

On obtient assez vite : $b=-2c$ et $a=c$. On en déduit : $X=\begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre $E_{-2}(f)$ est donc engendré par la fonction dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont 1, –2 et 1, c'est-à-dire par le vecteur $e_0-2e_1+e_2$ (c'est la fonction qui à x associe $1-2x+x^2$).

$$\boxed{E_{-2}(f)=\mathrm{vect}\,(e_0-2e_1+e_2).}$$

c) On peut écrire : $e_0 + 2e_1 + e_2 = (e_0 + e_2) + 2e_1$.
Ceci prouve que le vecteur de base de $E_2(f)$ est élément de $\mathrm{Im} f$, en tant que combinaison linéaire des vecteurs de base de $\mathrm{Im} f$, et par conséquent, que :

$$\boxed{E_2(f) \subset \mathrm{Im} f.}$$

De la même façon, on a : $e_0 - 2e_1 + e_2 = (e_0 + e_2) - 2e_1$.
Ceci prouve que le vecteur de base de $E_{-2}(f)$ est élément de $\mathrm{Im} f$, pour les mêmes raisons que ci-dessus, et par conséquent, que :

$$\boxed{E_{-2}(f) \subset \mathrm{Im} f.}$$

Exercice 3..

1) a) Pour tout couple (i, k) d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, notons $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
L'événement $(X_i = 1)$ est réalisé si et seulement si les n tirages ont lieu dans les autres urnes que l'urne numéro i. On a donc : $(X_i = 1) = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}$.
Comme les choix des urnes ont lieu indépendamment les uns des autres, les événements $U_{i,k}$ sont mutuellement indépendants, donc les $\overline{U_{i,k}}$ le sont aussi. On en déduit : $P(X_i = 1) = \prod_{j=1}^{n} P(\overline{U_{i,k}})$.
De plus, pour chaque épreuve (consistant à choisir une urne), la probabilité de ne pas choisir l'urne numéro i est égale à $\dfrac{n-1}{n}$ (n choix possibles et $(n-1)$ choix ne donnant pas l'urne numéro i), on a donc : $P(\overline{U_{i,k}}) = 1 - \dfrac{1}{n}$. On trouve alors : $P(X_i = 1) = \prod_{j=1}^{n} (1 - \dfrac{1}{n})$.
En conclusion :

$$\boxed{\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.}$$

b) De la même manière, l'événement $([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ est réalisé si et seulement si les n tirages ont lieu dans les autres urnes que les urnes dont les numéros sont i et j.
De plus, pour chaque épreuve (consistant à choisir une urne), la probabilité de ne choisir ni l'urne numéro i ni l'urne numéro j est égale à $\dfrac{n-2}{n}$ (n choix possibles et $(n-2)$ choix ne donnant ni l'urne numéro i, ni l'urne numéro j). Toujours par indépendance des choix d'urnes, on a :

$$\boxed{P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.}$$

c) On a : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$. Comme $\frac{1}{n^2}$ est strictement positif, on en déduit :

$$\boxed{1-\frac{2}{n}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^2.}$$

Pour finir, la fonction $\left(x \mapsto x^n\right)$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ ($1-\frac{2}{n}$ est positif car n est supérieur ou égal à 2), on en déduit : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.

Comme $P(X_i = 1) = P(X_j = 1) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ et comme $P(\,[X_i=1]\cap[X_j=1]\,) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$, ce qui précède s'écrit : $P(\,[X_i=1]\cap[X_j=1]\,) < P(X_i = 1)\,P(X_j = 1)$.

On a donc $P(\,[X_i=1]\cap[X_j=1]\,) \neq P(X_i = 1)\,P(X_j = 1)$. Par définition, ceci montre que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\boxed{X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

2) a) Par définition, on a : $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Par linéarité de l'espérance on a : $E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Comme X_i est une variable de Bernoulli de paramètre $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, on a : $E(X_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

On obtient alors : $E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

On conclut donc :

$$\boxed{E(Y_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.}$$

b) Après division par n, on a : $\frac{E(Y_n)}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1-\frac{1}{n})\right)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, on sait que : $\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

On en déduit que : $n\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$.

On a donc : $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-\frac{1}{n}) = -1$. Par continuité de la fonction exponentielle, on conclut :

$\lim_{n\to+\infty}\exp\left(n\ln(1-\frac{1}{n})\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. On a bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{E(Y_n)}{n} = \frac{1}{e}.}$$

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e\,E(Y_n)}{n} = 1$, ce qui traduit exactement le fait que :

$$\boxed{E(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}.}$$

3) a) Il y a autant de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves que de fois où l'urne numéro i a été choisie. Comme les choix d'urnes sont indépendants et qu'à chaque fois la probabilité de choisir l'urne numéro i est égale à $\dfrac{1}{n}$, on peut conclure que :

$$\boxed{N_i \text{ suit la loi } \mathcal{B}(n, \frac{1}{n}).}$$

D'après le cours, N_i possède une espérance et on a : $E(N_i) = n \times \dfrac{1}{n} = 1$.

$$\boxed{E(N_i) = 1.}$$

b) Le produit $N_i X_i$ est nul, puisque :

Soit X_i prend la valeur 0 et le produit est nul, soit $X_i = 1$, ce qui signifie que l'urne numéro i n'a pas été choisie et qu'il ne manque aucune boule dans cette urne, c'est-à-dire que $N_i = 0$ et le produit est encore nul.

$$\boxed{N_i X_i = 0.}$$

c) Comme $N_i X_i = 0$, on a $E(N_i X_i) = 0$. Par ailleurs, on a : $E(N_i) = 1$ et $E(X_i) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

On a donc : $\text{cov}(N_i, X_i) = E(N_i X_i) - E(N_i)\,E(X_i) = -\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

La covariance de N_i et X_i est différente de 0 donc :

$$\boxed{N_i \text{ et } X_i \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

4) Le programme complété est le suivant :

```
Program edhec_2011 ;
Var  x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
Randomize ;
Writeln('donnez un entier naturel supérieur ou égal à 2') ;
Readln(n) ;
n1 : = 0 ; x1 : = 1 ;
For k : = 1 to n do
   begin
   hasard : = random(n) + 1 ;
   If  hasard = 1  then  begin x1 : = 0 ; n1 : = n1 + 1 ; end ;
   end ;
```

Writeln(x1, n1) ;
End.

Problème ....

Partie 1 : question préliminaire

1) La fonction de répartition d'une variable aléatoire V suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ est définie par :

$$\boxed{F_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \le x \le b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}.}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire E suivant la loi exponentielle de paramètre λ est définie par :

$$\boxed{F_E(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \ge 0 \end{cases}.}$$

2) Avec le système complet d'événements $\{(Y = 1), (Y = -1)\}$, la formule des probabilités totales s'écrit, pour tout réel x :
$P(Z \le x) = P(\,[Z \le x] \cap [Y = 1]\,) + P(\,[Z \le x] \cap [Y = -1]\,)$.
En remplaçant Z par XY, il vient : $P(Z \le x) = P(\,[XY \le x] \cap [Y = 1]\,) + P(\,[XY \le x] \cap [Y = -1]\,)$.
En d'autres termes, il reste : $P(Z \le x) = P(\,[X \le x] \cap [Y = 1]\,) + P(\,[-X \le x] \cap [Y = -1]\,)$.
Soit encore : $P(Z \le x) = P(\,[X \le x] \cap [Y = 1]\,) + P(\,[X \ge -x] \cap [Y = -1]\,)$.
Comme X et Y sont indépendantes, on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}, P(X \le x) = P(X \le x)P(Y = 1) + P(X \ge -x)P(Y = -1)$.
La variable X étant à densité, on a aussi :
$\forall x \in \mathbb{R}, P(X \le x) = P(X \le x)P(Y = 1) + P(X > -x)P(Y = -1)$.
En utilisant les fonctions de répartition, on trouve :
$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = F_X(x)P(Y=1) + (1 - F_X(-x))P(Y=-1)$.

On sait que $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \dfrac{1}{2}$, on obtient donc enfin :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right).}$$

Partie 2

1) Comme X suit la loi normale centrée réduite, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \dfrac{1}{2}\left(\Phi(x) - \Phi(-x) + 1\right)$.

On sait aussi que : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, il reste donc : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \dfrac{1}{2}\left(\Phi(x) - 1 + \Phi(x) + 1\right) = \Phi(x)$.

En conclusion :

$$\boxed{Z \text{ suit la loi normale centrée réduite.}}$$

2) a) Comme X suit la loi uniforme sur [0, 1], d'après le préliminaire, on a :

$$F_X(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ x \text{ si } 0\le x\le 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases} \quad \text{d'où : } F_X(-x)=\begin{cases}0 \text{ si } -x<0\\ -x \text{ si } 0\le -x\le 1\\ 1 \text{ si } -x>1\end{cases}$$

On peut écrire ceci sous la forme :

$$F_X(-x)=\begin{cases}0 \text{ si } x>0\\ -x \text{ si } -1\le x\le 0\\ 1 \text{ si } x<-1\end{cases}.$$

b) • Si $x<-1$, alors $F_X(x)=0$ et $F_X(-x)=1$ et on a : $F_Z(x)=0$.

• Si $-1\le x<0$, alors $F_X(x)=0$ et $F_X(-x)=-x$ et on a : $F_Z(x)=\dfrac{x+1}{2}$.

• Si $0\le x\le 1$, alors $F_X(x)=x$ et $F_X(-x)=0$ et on a : $F_Z(x)=\dfrac{x+1}{2}$.

• Si $1<x$, alors $F_X(x)=1$ et $F_X(-x)=0$ et on a : $F_Z(x)=1$.

En résumé : $F_Z(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<-1\\ \dfrac{x+1}{2} \text{ si } -1\le x\le 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$.

On reconnaît alors que :

$$\boxed{Z \text{ suit la loi uniforme sur } [-1, 1]}.$$

Partie 3

1) a) On sait, d'après le rappel, que : $F_X(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 1-e^{-x} \text{ si } x\ge 0\end{cases}$. On en déduit alors que :

$$F_X(-x)=\begin{cases}0 \text{ si } -x<0\\ 1-e^{x} \text{ si } -x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0 \text{ si } x>0\\ 1-e^{x} \text{ si } x\le 0\end{cases}.$$

• Si $x<0$, alors $F_X(x)=0$ et $F_X(-x)=1-e^x$ et on a :

$F_Z(x)=\dfrac{1}{2}(0-1+e^x+1)=\dfrac{1}{2}e^x$.

• Si $x\ge 0$, alors $F_X(x)=1-e^{-x}$ et $F_X(-x)=0$ (même si $x=0$) et on a :

$F_Z(x)=\dfrac{1}{2}(1-e^{-x}-0+1)=1-\dfrac{1}{2}e^{-x}$.

Pour résumer, on a bien :

$$\boxed{F_Z(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}e^{-x} \text{ si } x\ge 0\\ \dfrac{1}{2}e^{x} \text{ si } x<0\end{cases}}.$$

b) On sait déjà que Z est une variable aléatoire (admis par l'énoncé), il reste à vérifier deux conditions :
F_Z est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
• La continuité de F_Z sur $]-\infty, 0[$ est acquise puisque F_Z est proportionnelle à la fonction exponentielle sur cet intervalle.
• La continuité de F_Z sur $]0, +\infty[$ est acquise puisque F_Z est composée de deux fonctions affines ($x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x$) et de la fonction exponentielle sur cet intervalle.
• En 0, on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Z(x) = F_Z(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Z(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2}$.
Premier bilan : la fonction F_Z est bien continue sur $\mathbb{R}$.

F_Z est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points (ici, en 0) ?
• La classe C^1 de F_Z sur $]-\infty, 0[$ est acquise puisque F_Z est proportionnelle à la fonction exponentielle sur cet intervalle.
• La classe C^1 de F_Z sur $]0, +\infty[$ est acquise puisque F_Z est composée de deux fonctions affines ($x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x$) et de la fonction exponentielle sur cet intervalle.
Deuxième bilan : la fonction F_Z est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.
En conclusion :

$$\boxed{Z \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

c) En dérivant, sauf en 0, les égalités définissant F_Z, on obtient : $F_Z'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

En notant f_Z une densité de Z et en posant $f_Z(0) = \frac{1}{2}$, on trouve finalement :

$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. On peut alors résumer ainsi :

$$\boxed{f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.}$$

2 a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ est égale à l'espérance d'une variable aléatoire S suivant la loi exponentielle de paramètre 1 (espérance qui vaut $\frac{1}{1}$). On a donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1.}$$

b) Pour tout réel x, on a : $f_Z(-x) = \frac{1}{2}e^{-|-x|}$. Comme la fonction valeur absolue est paire, on obtient : $f_Z(-x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} = f_Z(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_Z \text{ paire.}}$$

D'après la question 2a), l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\frac{1}{2}e^{-x}dx$ est convergente et vaut $\frac{1}{2}$. Comme sur $[0, +\infty[$, on a $f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ alors : $\int_0^{+\infty} x\,f_Z(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

Par parité de f_Z, la fonction $h : x \mapsto x\,f_Z(x)$ est impaire. En effet, on a :
$h(-x) = -x\,f_Z(-x) = -x\,f_Z(x) = -h(x)$.

Par imparité de h, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x\,f_Z(x)\,dx$ converge également et vaut $-\frac{1}{2}$.

La relation de Chasles permet de conclure que : $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_Z(x)\,dx$ converge et vaut 0.

$$\boxed{Z \text{ possède une espérance et } E(Z) = 0.}$$

3) a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$ est le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire S suivant la loi exponentielle de paramètre 1. L'espérance d'une telle variable aléatoire vaut 1 et sa variance aussi. Par conséquent, d'après la formule de Koenig-Huygens ($E(S^2) = V(S) + \left(E(S)\right)^2$), on trouve que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2.}$$

b) D'après la question 3a), l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2\frac{1}{2}e^{-x}dx$ est convergente et vaut 1.

Comme sur $[0, +\infty[$, on a $f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ alors : $\int_0^{+\infty} x^2f_Z(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Par parité de f_Z, la fonction $k : x \mapsto x^2\,f_Z(x)$ est paire. En effet, on a :
$k(-x) = (-x)^2\,f_Z(-x) = x^2\,f_Z(x) = k(x)$.

Par parité de k, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x^2f_Z(x)\,dx$ converge également et vaut 1.

La relation de Chasles permet de conclure que : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f_Z(x)\,dx$ converge et vaut 2.

$$\boxed{Z \text{ possède un moment d'ordre 2 et } E(Z^2) = 2.}$$

On sait que : $V(Z) = E(Z^2) - \left(E(Z)\right)^2$ donc on a :

$$\boxed{V(Z) = 2.}$$

4) a) Comme $E(Y) = 0$, on a, par produit : $E(X)E(Y) = 0$. On sait également que $E(Z) = 0$, on a donc : $E(X)E(Y) = E(Z)$. Étant donné que $Z = XY$, ceci s'écrit : $E(X)E(Y) = E(XY)$.

On peut affirmer que : $\text{cov}(X, Y) = 0$. On retrouve ainsi le fait que, si deux variables aléatoires sont indépendantes, alors leur covariance est nulle (la réciproque étant fausse).

b) On a : $Z^2 = (XY)^2 = X^2Y^2$. Comme Y ne prend que les valeurs 1 et –1, Y^2 est la variable certaine égale à 1. On a donc : $Z^2 = X^2$.
On en déduit que $E(Z^2) = E(X^2) = V(X) + \left(E(X)\right)^2 = 1 + 1 = 2$.
De plus, $E(Z) = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{V(Z) = 2.}$$

5) a) En notant F_V et F_Q les fonctions de répartition de V et Q, on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Q(x) = P(Q \leq x) = P(-\ln(1-V) \leq x) = P(\ln(1-V) \geq -x) = P(1-V \geq e^{-x})$, la dernière égalité provenant du fait que la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Q(x) = P(V \leq 1-e^{-x}) = F_V(1-e^{-x})$.

La fonction exponentielle est à valeurs dans $]0, +\infty[$ donc : $1-e^{-x} < 1$.
• Si $x \geq 0$, alors $e^{-x} < 1$ et $1-e^{-x} \geq 0$. On en déduit que : $0 \leq 1-e^{-x} < 1$. On peut alors remplacer et obtenir : $F_Q(x) = 1-e^{-x}$.
• Si $x < 0$, alors $e^{-x} > 1$ et $1-e^{-x} < 0$. On en déduit que : $F_Q(x) = 0$.
On a donc le résultat :

$$\boxed{Q \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } 1.}$$

b) La variable U suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ donc $U(\Omega) = \{0, 1\}$. On en déduit que $(2U-1)(\Omega) = \{-1, 1\}$. Comme $R = 2U-1$, on a :

$$\boxed{R(\Omega) = \{-1, 1\}.}$$

Pour aller plus loin, on a :
$P(R = -1) = P(2U-1 = -1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$.
$P(R = 1) = P(2U-1 = 1) = P(U = 1) = \frac{1}{2}$.
En conclusion, la loi de R est donnée par :

$$\boxed{P(R = -1) = P(R = 1) = \frac{1}{2}.}$$

La loi de R est la même que celle de Y.

c) • En Turbo Pascal, l'instruction « u : = random(2) ; » renvoie au hasard un nombre entier élément de $\{0, 1\}$ donc : « u : = random(2) ; » simule la loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

• En Turbo Pascal, l'instruction « v : = random ; » renvoie au hasard un nombre réel, élément de $[0, 1[$ donc : « v : = random ; » simule la loi uniforme sur $[0, 1[$.

La variable Z est le produit de X, qui suit la même loi que Q, simulée, d'après la question 5a), par « – ln(1 – random) », par Y qui suit la même loi que R, simulée, d'après la question 5b), par « 2∗random(2) – 1 »).
On peut donc écrire la déclaration suivante :

```
Function zed : real ;
   Begin
   zed : = – ln(1 – random)∗ (2∗random(2) – 1 ) ;
   End ;
```