Option ES

Corrigé EDHEC 2010

Exercice 1 ....

1) Pour tout couple (x, y) de $]\,0, +\infty[\times]\,0, +\infty[$, on a :

$f(x, y) = 1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} + 1 = 2 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.

D'autre part : $f(x, y) = (x + y)\,\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{(x+y)^2}{xy}$.

2) d'après ce qui précède, la fonction f est une fraction rationnelle bien définie sur U (x et y sont différents de 0) par conséquent, f est de classe C^2 sur U.

3) On peut, en développant, écrire $f(x, y) = 2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

Pour tout (x, y) de $]\,0, +\infty[\times]\,0, +\infty[$, on a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} = \frac{y^2 - x^2}{x y^2}.$$

Les points critiques de f sont les couples (x, y) qui annulent simultanément ces deux dérivées premières. Les points critiques de f sont donc les solutions de $x^2 = y^2$, ce qui équivaut à $x = y$ ou $x = -y$. Comme x et y sont tous les deux strictement positifs, il reste : $x = y$.

Les points critiques de f sont les couples (x, x), avec $x > 0$

4) Les dérivées partielles secondes de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y}{x^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x}{y^3}.$$

En un point critique quelconque (x, x), on obtient, en utilisant les notations de Monge : $r = \dfrac{2}{x^2}$, $s = -\dfrac{2}{x^2}$ et $t = \dfrac{2}{x^2}$.

On a alors :

$$\boxed{rt - s^2 = 0}$$

Il n'est pas possible de conclure à l'existence d'extrema locaux de f.

5) a) $(x+y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$.
On a donc :

$$\boxed{(x+y)^2 \geq 4xy}$$

b) On a $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^2}{x\,y}$.

Comme $(x+y)^2 \geq 4xy$, en divisant par $x\,y > 0$, on obtient : $f(x, y) \geq 4$. De plus l'égalité $f(x, x) = 4$ prouve que :

$$\boxed{f \text{ admet sur }]\,0, +\infty\,[^{\,2} \text{ un minimum global égal à 4 en tous les couples } (x, x)}$$

6) La fonction g est bien définie sur $]\,0, +\infty\,[^{\,2}$, et on a successivement :
$\forall (x, y) \in\,]\,0, +\infty\,[^{\,2}$, $g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln(x) - \ln(y)$.

$g(x, y) = \ln(x + y)^2 - \ln(x\,y) = \ln \dfrac{(x+y)^2}{x\,y} = \ln(f(x, y))$.

Comme, pour tout couple (x, y) de $]\,0, +\infty\,[^{\,2}$, on a $f(x, y) \geq 4$, on en déduit, par croissance de la fonction logarithme népérien sur $]\,0, +\infty\,[$, que $\ln(f(x, y)) \geq \ln(4)$.
Pour finir :

$$\boxed{\forall (x, y) \in\,]\,0, +\infty\,[^{\,2},\ g(x, y) \geq 2\ln(2)}$$

Exercice 2 ....

1) $u_0 = \displaystyle\prod_{k=0}^{0}(1+\frac{1}{2^k}) = 1 + 1 = 2$.

$u_1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{1}(1+\frac{1}{2^k}) = (1 + 1)(1 + \frac{1}{2}) = 3$.

$u_2 = \displaystyle\prod_{k=0}^{2}(1+\frac{1}{2^k}) = (1 + 1)(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$.

2) a) On sait que $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est le produit de facteurs tous plus grands que 1, dont le premier vaut 2.
Pour conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2}$$

Remarque : on pouvait aussi établir ce résultat par récurrence.

b) Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n+1}(1+\frac{1}{2^k})$.

En mettant de côté le facteur correspondant à $k = n+1$, on obtient :

$u_{n+1} = (1 + \dfrac{1}{2^{n+1}})\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+\frac{1}{2^k}) = (1 + \frac{1}{2^{n+1}})\,u_n$.

On en déduit que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\,u_n$. Comme $\dfrac{1}{2^{n+1}} > 0$ et comme $u_n \geq 2 > 0$, on a :

$u_{n+1} - u_n > 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

3) a) On pose, pour tout réel x strictement supérieur à -1, $g(x) = \ln(1+x) - x$.
La fonction g est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a :

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.

On a donc : $g'(x) > 0$ sur $]-1, 0[$ et $g'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$.
La fonction g admet donc un maximum global en 0 et ce maximum vaut $g(0) = 0$.
Ceci prouve que , pour tout x supérieur strictement à -1, on a : $g(x) \le 0$.
On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \le x}$$

b) Comme $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+\dfrac{1}{2^k}) > 0$, on a : $\ln u_n = \sum_{k=0}^{n}\ln(1+\dfrac{1}{2^k})$.

D'après la question précédente, $\ln(1+\dfrac{1}{2^k}) \le \dfrac{1}{2^k}$, d'où : $\ln u_n \le \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}$.

Comme $\dfrac{1}{2} \ne 1$, on a : $\ln u_n \le \dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$.

On en conclut alors que : $\ln u_n \le 2(1-(\dfrac{1}{2})^{n+1})$, ce qui démontre, en majorant encore un peu que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ln u_n \le 2}$$

4) Par croissance de la fonction exponentielle, on a : $u_n \le e^2$. Ceci prouve que la suite (u_n) est majorée. Comme de plus, elle est croissante, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

Comme $2 \le u_n \le e^2$, on a, après passage à la limite : $2 \le \ell \le e^2$.

5) a) On sait que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ strictement positif, donc par continuité de la fonction logarithme népérien en ℓ, on en conclut que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers $\ln(\ell)$.

Pour tout entier naturel n, on a : $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n}\ln(1+\dfrac{1}{2^k})$ donc en passant à la limite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+\dfrac{1}{2^k})$.

Comme la fonction "ln" est continue, on sait que : $\ln(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$.

Ceci s'écrit :

$$\boxed{\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})}$$

b) On a : $\ln(\frac{\ell}{u_n}) = \ln(\ell) - \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{2^k}) - \sum_{k=0}^{n} \ln(1+\frac{1}{2^k})$.

On obtient donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\frac{\ell}{u_n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{2^k})}$$

c) Comme $\ln(1 + \frac{1}{2^k}) \geq 0$, on a tout de suite : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\frac{\ell}{u_n}) \geq 0$ (somme de termes positifs). D'autre part, $\ln(1 + \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$ donc :

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{2^k}) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$. Au final, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln(\frac{\ell}{u_n}) \leq \frac{1}{2^n}}$$

d) En appliquant la fonction exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$, à l'encadrement précédent, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{\ell}{u_n} \leq e^{\frac{1}{2^n}}$.

En inversant (tout est strictement positif), on trouve : $e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{u_n}{\ell} \leq 1$.

En multipliant les trois membres par $-\ell < 0$, on a : $-\ell \leq -u_n \leq -\ell\, e^{-\frac{1}{2^n}}$.

Enfin, en ajoutant ℓ, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1-e^{-\frac{1}{2^n}})}$$

e) On pose : $h(x) = e^{-x} + x - 1$.

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $h'(x) = -e^{-x} + 1$.

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow x > 0$.

On a donc : $h'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$.

La fonction h admet donc un minimum global en 0 et ce minimum vaut $h(0) = 0$.

Ceci prouve que, pour tout réel x, on a : $h(x) \geq 0$.

Ceci s'écrit : $e^{-x} + x - 1 \geq 0$, et on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 1 - e^{-x} \leq x}$$

Remarque : on pouvait citer la convexité de la fonction exponentielle qui garantit que : $\forall u \in \mathbb{R}, e^u \geq 1 + u$, puis poser $u = -x$.

D'après ce qui précède, on peut écrire : $1-e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}$.

En multipliant par $\ell > 0$, on obtient : $\ell(1-e^{-\frac{1}{2^n}}) \leq \frac{\ell}{2^n}$. Avec le résultat de la question 5c), on a finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}}$$

Comme la série de terme général $\frac{\ell}{2^n}$ est convergente (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ élément de $]-1, 1[$), le critère de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } (\ell - u_n) \text{ converge}}$$

Exercice 3 ....

1) a) La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (elle coïncide avec la fonction nulle sur $]-1, 1[$ et elle est bien définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ en tant que quotient dont le dénominateur ne s'annule pas).

- L'ensemble de définition de f est donc bien centré en 0.
- Pour tout réel x de $]-1, 1[$, $-x \in]-1, 1[$ donc on a $f(-x) = 0 = f(x)$.
- Pour tout réel x de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, $-x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et on a :

$f(-x) = \dfrac{1}{2(-x)^2} = \dfrac{1}{2x^2} = f(x)$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire}}$$

b) • La fonction f est bien définie sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$ comme fraction rationnelle de dénominateur strictement positif, f est donc positive sur ces deux intervalles. Comme de plus, elle est nulle sur $]-1, 1[$, alors f est positive.

• La restriction de f est continue sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle bien définie. De plus, la restriction de f est nulle sur $]-1, 1[$, donc continue sur $]-1, 1[$.
La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en -1 et en 1.

• Pour tout réel A supérieur ou égal à 1 :

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{1}{2x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2x}\right]_1^A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{A}\right).$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A} = 0$, on en conclut, par définition d'une intégrale convergente, que

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

La fonction f est paire donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx$ converge et vaut aussi $\frac{1}{2}$.

Pour finir, comme $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$, la relation de Chasles donne $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Les trois points précédents prouvent bien que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ peut être considérée comme une densité de probabilité}}$$

2) Pour tout x supérieur ou égal à 1, $x f(x) = \frac{1}{2x}$ et $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ diverge (intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 1$) donc :

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } X \text{ n'admet pas d'espérance}}$$

3) a) Par définition, pour tout réel x :
$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\ln(|X|) \leq x)$. La fonction exponentielle étant une bijection croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit : $F_Y(x) = P(|X| \leq e^x)$.
Par propriété de la valeur absolue, on a alors : $F_Y(x) = P(-e^x \leq X \leq e^x)$.
Pour conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)}$$

b) Comme X est une variable aléatoire à densité, la fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en -1 et en 1, il en résulte que, par composition, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0 (car 0 est le réel en lequel $e^x = 1$ et $-e^x = -1$).
Ceci prouve que Y est une variable aléatoire à densité. De plus, en dérivant l'expression ci-dessus, sauf en 0, on obtient, en notant f_Y une densité de Y :
$\forall x \neq 0, f_Y(x) = e^x F_X'(e^x) + e^x F_X'(-e^x) = e^x f_X(e^x) + e^x f_X(-e^x)$.
Comme f_X est paire, on obtient : $\forall x \neq 0, f_Y(x) = 2e^x f_X(e^x)$.
Si $x < 0$, alors $0 < e^x < 1$, et on a $f_X(e^x) = 0$, puis $f_Y(x) = 0$.
Si $x > 0$, alors $e^x > 1$, et on a $f_X(e^x) = \frac{1}{2(e^x)^2}$, puis $f_Y(x) = 2e^x \frac{1}{2(e^x)^2} = e^{-x}$.

On complète la définition de f_Y en posant par exemple $f_Y(0) = 1$, ce qui donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

On reconnaît alors que :

$$\boxed{Y \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } 1}$$

4) a) Si x est positif, alors $-x$ est négatif et, par croissance de la fonction exponentielle, on a : $e^{-x} \leq 1$, ce qui signifie : $1 - e^{-x} \geq 0$.
Comme de plus, il est toujours vrai que $e^{-x} > 0$, on a en plus $1 - e^{-x} < 1$.
On a bien :

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est positif, alors } 1 - e^{-x} \text{ appartient à } [0, 1[}$$

Si x est strictement négatif, alors $-x$ est strictement positif et, par croissance de la fonction exponentielle, on a : $e^{-x} > 1$, ce qui signifie : $1-e^{-x} < 0$.
On a bien :

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est strictement négatif, alors } 1-e^{-x} < 0}$$

Remarque : l'étude des variations de la fonction $x \mapsto 1-e^{-x}$, ainsi que sa valeur en 0, permettent d'obtenir ces deux résultats beaucoup plus rapidement.

b) Pour tout réel x, on a : $(Z \leq x) = (-\ln(1-U) \leq x) = (\ln(1-U) \geq -x)$.
On a donc : $F_Z(x) = P(\ln(1-U) \geq -x) = P(1-U \geq e^{-x})$, puisque la fonction exponentielle est une bijection croissante sur $\mathbb{R}$.
Tout ceci donne : $F_Z(x) = P(U \leq 1-e^{-x})$.
D'après la question précédente et comme U suit la loi uniforme sur [0, 1], on en déduit que, pour tout x positif, $F_Z(x) = 1-e^{-x}$ et que, pour tout x strictement négatif, $F_Z(x) = 0$. Ceci montre que :

$$\boxed{Z \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } 1}$$

c) La déclaration de fonction complétée est la suivante :

```
Function exp : real ;
   Begin
   exp : = –ln(1 – random) ;
   End ;
```

Problème..

Partie 1

1) a) Par lecture des images des vecteurs de base de E par f, on a :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E, on a : $\text{Im} f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$
On obtient donc, en remplaçant : $\text{Im} f = \text{Vect}\left(\frac{1}{3}(e_2+e_3), \frac{2}{3}e_1, \frac{2}{3}e_1\right)$.
Ceci se réduit à : $\text{Im} f = \text{Vect}(e_2 + e_3, e_1) = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 0))$.
Les vecteurs (0, 1, 1) et (1, 0, 0) ne sont pas proportionnels donc $(e_2 + e_3, e_1)$ est une famille libre et, comme elle engendre $\text{Im} f$, c'est une base de $\text{Im} f$.
Ceci prouve que :

$$\boxed{\dim \text{Im} f = 2}$$

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, le théorème du rang permet d'affirmer que :

$$\boxed{\dim \text{Ker} f = 1}$$

c) Par linéarité de f, on a $f(e_2 - e_3) = 0$, ce qui prouve que $e_2 - e_3$ appartient à Ker$f$. On a $e_2 - e_3 = (0, 1, -1)$ donc $e_2 - e_3$ n'est pas nul. De plus, Ker$f$ est de dimension 1, on est donc sûr que :

$$\boxed{(e_2 - e_3) \text{ est une base de Ker} f}$$

Par définition, Ker$f$ est l'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = 0 = 0\,u$, donc, puisque Ker$f$ n'est pas réduit au vecteur nul, on a :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f \text{ et le sous-espace propre associé est Vect}(e_2 - e_3)}$$

d) On va maintenant chercher les valeurs propres λ non nulles de f en résolvant le système d'équations $MX = \lambda X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Après quelques simplifications, on trouve : $MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda x + 2y + 2z = 0 \\ x = 3\lambda y \\ x = 3\lambda z \end{cases}$.

Puisque $\lambda \neq 0$, on a : $MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3\lambda} x \\ z = \dfrac{1}{3\lambda} x \\ (-3\lambda + \dfrac{4}{3\lambda})x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3\lambda} x \\ z = \dfrac{1}{3\lambda} x \\ (4 - 9\lambda^2)x = 0 \end{cases}$

Les valeurs propres de M (donc de f) sont les réels λ solutions de $4 - 9\lambda^2 = 0$ (si λ n'est pas solution de cette équation, alors le système ci-dessus n'a que le vecteur nul comme solution).

Les valeurs propres non nulles de f sont donc $\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{2}{3}$.

- Pour $\lambda = \dfrac{2}{3}$, on a : $MX = \dfrac{2}{3} X \Leftrightarrow y = z = \dfrac{1}{2} x \Leftrightarrow z = y$ et $x = 2y$.

$MX = \dfrac{2}{3} X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } f \text{ associé à la valeur propre } \frac{2}{3} \text{ est } F = \text{Vect}((2, 1, 1))}$$

Comme $(2, 1, 1) \neq 0$, la famille $((2, 1, 1))$ est une base de F et on a : $\dim F = 1$.

- Pour $\lambda = -\dfrac{2}{3}$, on a : $MX = -\dfrac{2}{3} X \Leftrightarrow y = z = -\dfrac{1}{2} x \Leftrightarrow z = y$ et $x = -2y$.

$$MX = -\frac{2}{3}X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $-\frac{2}{3}$ est $G = \text{Vect}((-2, 1, 1))$

Comme $(-2, 1, 1) \neq 0$, la famille $((-2, 1, 1))$ est une base de F et on a : $\dim F = 1$.

e) La somme des dimensions des 3 sous-espaces propres de f (qui sont $\text{Ker} f$, F et G) est égale à 3, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

Remarque. On pouvait aussi se contenter de la condition suffisante : f possède 3 valeurs propres distinctes et f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, donc f est diagonalisable.

2) a) La matrice P est la matrice dont les colonnes sont les colonnes des coordonnées des vecteurs de base des sous-espaces propres de f, par conséquent, comme f est diagonalisable, on sait que P est inversible (en fait P est une *matrice de passage* d'une base, la base (e_1, e_2, e_3), à une autre base, formée de vecteurs propres de f, ce qui en fait une matrice inversible). Toujours d'après le cours, la matrice M étant diagonalisable, on sait qu'il existe une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$, où les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres λ_i de M, écrites de façon que la $i^{\text{ème}}$ colonne de P soit un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_i qui est située en $i^{\text{ème}}$ position sur la diagonale de D. On a donc :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) On a : $PQ = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$

On en déduit, par définition de l'inversibilité, que $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$, c'est-à-dire :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

c) Montrons que, pour tout entier naturel j, on a : $M^j = PD^jP^{-1}$.

- Pour $j = 0$, on a $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ et $M^0 = I$ donc : $M^0 = PD^0P^{-1}$.

• Si l'on suppose , pour un certain entier naturel j, que $M^j = PD^j P^{-1}$, alors on a : $M^{j+1} = M^jM = PD^jP^{-1} PD P^{-1} = PD^jD P^{-1} = PD^{j+1}P^{-1}$.
• On a bien :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N} \,,\, M^j = PD^jP^{-1}}$$

d) Pour tout entier naturel j non nul, on a :

$$D^j P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2/3)^j & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0^j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme $j \geq 1$, on a $0^j = 0$ et la première colonne de $D^j P^{-1}$ est :

$$X_j = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2/3)^j \\ -(-2/3)^j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la première colonne de M^j est alors PX_j, soit :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2/3)^j \\ -(-2/3)^j \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(2/3)^j + 2(-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \end{pmatrix}.$$

Pour $j = 0$, cette colonne vaut $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui est bien la première colonne de $M^0 = I$.

Conclusion : pour tout entier naturel j, la première colonne de M^j est :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(2/3)^j + 2(-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \end{pmatrix}$$

Partie 2

1) Le premier tirage consiste à tirer une boule au hasard dans l'urne (qui contient 3 boules numérotées 1, 2, 3) donc :

$$\boxed{X_1 \text{ suit la loi uniforme } \mathcal{U}_{[\![1,3]\!]}}$$

2) Le programme complété est le suivant :

```
Program simul ;
Var i, k, X, tirage : integer ;
Begin
Randomize ;   Readln(k) ; X : = random(3) + 1 ;
For i : = 2 to k do
    begin tirage : = random(3) + 1 ;  If X = 1 then X : = tirage
                                                 else If tirage < > X   then X : = 1 ;
    end ;
```

Writeln (X) ;
end.

3) a) Pour tout j élément de $\{1, 2, 3\}$ et pour tout entier naturel k, on a, par équiprobabilité :

$$\boxed{P_{(X_k=1)}(X_{k+1}=j) = \frac{1}{3}}$$

Pour tout j de $\{2, 3\}$ et pour tout entier naturel k, on a :

$$\boxed{P_{(X_k=j)}(X_{k+1}=j) = \frac{1}{3} \text{ (il faut obtenir la boule N°}j\text{)}}$$

Pour tout j de $\{2, 3\}$ et pour tout entier naturel k, on a :

$$\boxed{P_{(X_k=j)}(X_{k+1}=1) = \frac{2}{3} \text{ (il faut obtenir une autre boule que la boule N°}j\text{)}}$$

Pour tout j de $\{2, 3\}$ et pour tout entier naturel i, on a, si $i \notin \{1, j\}$:

$$\boxed{P_{(X_k=j)}(X_{k+1}=i) = 0}$$

b) En écrivant 3 fois la formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements $\{ (X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3) \}$, on obtient :

$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{3} P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)\, P(X_k = j).$$

Ceci donne :

$$\boxed{\begin{array}{c} P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{3} P(X_k = 1) + \frac{2}{3} P(X_k = 2) + \frac{2}{3} P(X_k = 3) \\ P(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{3} P(X_k = 1) + \frac{1}{3} P(X_k = 2) \\ P(X_{k+1} = 3) = \frac{1}{3} P(X_k = 1) + \frac{1}{3} P(X_k = 3) \end{array}}$$

La matrice A telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$ est :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

c) Avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $AU_0 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, ce qui est bien égal à U_1 puisque X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$.

Dès lors, la relation $U_{k+1} = AU_k$ est valable pour tout entier naturel k.
Montrons la relation $U_k = A^k U_0$ par récurrence sur k.
Pour $k = 0$, on a bien : $A^0 U_0 = I\,U_0 = U_0$.
Si l'on suppose, pour un entier naturel k fixé dans $\mathbb{N}$ que $U_k = A^k U_0$, alors comme $U_{k+1} = A\,U_k$ (heureusement que l'énoncé a inventé U_0) on obtient :
$U_{k+1} = A\,A^k U_0 = A^{k+1}\,U_0$. On a donc bien montré que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, U_k = A^k U_0}$$

4) a) $M + \frac{1}{3}I = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

On a bien :

$$\boxed{A = M + \frac{1}{3}I}$$

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \left(M + \frac{1}{3}I\right)^k$. Grâce à la formule du binôme, comme I et M commutent, on obtient : $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M^j \left(\frac{1}{3}I\right)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M^j \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} I$.

On a alors :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j}$$

b) D'après le résultat de la question I 2c), la première colonne de A^k est obtenue en effectuant le calcul :

$$C_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(2/3)^j + 2(-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \\ (2/3)^j - (-2/3)^j \end{pmatrix}.$$

Le premier élément est :

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

Le deuxième élément est :

$$\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j - \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

Le troisième élément est :

$$\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}\left(\frac{2}{3}\right)^{j} - \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}\left(-\frac{2}{3}\right)^{j} = \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right).$$

Remarque : les dernières égalités de chaque ligne sont obtenues grâce à la formule du binôme, après mise en facteur de $1/4$.

La première colonne de A^k est :

$$C_k = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2(-1/3)^k \\ 1-(-1/3)^k \\ 1-(-1/3)^k \end{pmatrix}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $U_k = A^k U_0$, donc :

$$U_k = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2(-1/3)^k & \times & \times \\ 1-(-1/3)^k & \times & \times \\ 1-(-1/3)^k & \times & \times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2(-1/3)^k \\ 1-(-1/3)^k \\ 1-(-1/3)^k \end{pmatrix}.$$

On en déduit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$ (la variable aléatoire X_0 n'étant pas définie) :

$$\boxed{\begin{gathered} P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) \\ P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) \end{gathered}}$$

c) Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on a $\lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = 0$, d'où :

$\lim_{k\to+\infty} P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{k\to+\infty} P(X_k = 2) = \lim_{k\to+\infty} P(X_k = 3) = \frac{1}{4}$.

La suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont la loi est donnée par : $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$.

5) a) Par définition de l'espérance, on a : $E(X_k) = \sum_{j=1}^{3} jP(X_k = j)$.

On obtient :

$$E(X_k) = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) + 2\times\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) + 3\times\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right).$$

$$E(X_k) = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) + \frac{5}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right).$$

On trouve finalement :

$$\boxed{E(X_k) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}}$$

b) Première version

• Si k est pair, alors $(-\frac{1}{3})^k = (\frac{1}{3})^k$ et on a :

$$E(X_k) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}(\frac{1}{3})^k = \frac{1}{4}(7 - 3\exp(k\ln\frac{1}{3})) = \frac{1}{4}(7 - 3\exp(-k\ln 3))$$

• Si k est impair, alors $(-\frac{1}{3})^k = -(\frac{1}{3})^k$ et on a :

$$E(X_k) = \frac{7}{4} + \frac{3}{4}(\frac{1}{3})^k = \frac{1}{4}(7 + 3\exp(k\ln\frac{1}{3})) = \frac{1}{4}(7 + 3\exp(-k\ln 3))$$

```
Function esp (k : integer) : real ;
        Begin
        If (k mod 2) = 0   then esp : = (7 – 3 * exp(– k * ln(3))) / 4
                           else esp : = (7 + 3 * exp(– k * ln(3))) / 4
        End ;
```

Deuxième version

```
Function esp (k : integer) : real ;
        var i : integer ;
        var aux : real ;
        Begin
        aux : = 1 ;
        For i : = 1 to k do aux : = aux / (–3) ;
        esp : = (7 – 3 * aux) / 4
        End ;
```