Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + n\,x$.

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 5 cm.

1. a) Pour tout réel x, comme $1 + e^x \neq 0$, f_n est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} + n$

   Remarque : quand on dérive avec une puissance au dénominateur, il y aura ensuite factorisation au numérateur et simplification. i lne faut pas développer !

   $$f_n''(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2 + 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = e^x\frac{-(1+e^x)+2e^x}{(1+e^x)^3} = e^x\frac{e^x-1}{(1+e^x)^3}$$

   b) $f_n''(x)$ est donc du signe de $e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$\searrow +$	$n - \frac{1}{4} > 0$	$\nearrow +$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

   Et comme $f_n'(0) = n - \frac{1}{4} > 0$ alors $f' > 0$ et

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

2. a) En $-\infty$: $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + n\,x \to -\infty$ et

   en $+\infty$: $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + n\,x \to +\infty$ (pas de forme indéterminée)

   b) Quand $x \to -\infty$: $\dfrac{1}{1+e^x} \to 1$ donc $f_n(x) - (nx+1) \to 0$ et la droite d'équation $y = nx + 1$ est asymptote.

   Quand $x \to +\infty$: $\dfrac{1}{1+e^x} \to 0$ donc $f_n(x) - nx \to 0$ et la droite d'équation $y = nx$ est asymptote.

   Conclusion : $\boxed{\text{les droites } (D_n) \text{ et } (D_n') \text{ sont asymptotes de } (C_n)}$

   c) f étant C^2, elle a un point d'inflexion en A_n si et seulement si f'' s'annule et change de signe.

   Conclusion : $\boxed{\text{le seul point d'inflexion est } A_n\left(0, \tfrac{1}{2}\right).}$

   d) En 0, la dérivée de f vaut $f'(0) = n - \frac{1}{4}$.

   Conclusion : $\boxed{(T_1) : y = \left(n - \tfrac{1}{4}\right)x + \tfrac{1}{2}}$

   Pour le tracé, une fois les asymptotes et la tangente mises en place, il faut placer la courbe conformément à la convexité : en dessous de la tangente avant 0 et au dessus après.

3. a) f_n est continue et stricmtent croissante sur $\mathbb{R}$.

   Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{-\infty} f_n\ ,\ \lim_{+\infty} f_n[= \mathbb{R}$.

   De plus $0 \in \mathbb{R}$.

   Donc l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

   b) On compare les images : $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$: $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 = \dfrac{-e^{-1/n}1}{1+e^{-1/n}} < 0$ et $f_n(u_n) = 0$

Donc $f_n\left(\dfrac{-1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0)$. et f_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{-1}{n} < u_n < 0}$

c) Et comme $\frac{1}{n} \to 0$, par encadrement
Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

d) On a $0 = f_n(u_n) = \frac{1}{1+e^{u_n}} + n\ u_n$ donc $u_n = -\frac{1}{n}\frac{1}{1+e^{u_n}}$ et $\left(u_n/\frac{-1}{2n}\right) = \frac{2}{1+e^{u_n}} \to 1$ et on a alors

Conclusion : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}}$.

Exercice 2

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$.

1. a) **Arttention** : on ne développe pas, on commence par calculer la différence !

$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}$ et

$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

enfin $A(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{A(A-2I)^2 = 0}$

Donc **si** α est valeur propre de A **alors** $\alpha(\alpha-2)^2 = 0$ donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les seules valeurs propres possibles de } f \text{ sont 0 et 2}}$

N.B. cela est cohérent avec les valeurs propres de (sur la diagonale) de la matrice T (triangulaire) que l'on a ci-dessous.

b) On considère les vecteurs $u = (2, 1, -2)$ et $v = (3, 1, -2)$.
Les coordonnées des images sont données par :

$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(u) = 0$

$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f(v)) = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $f(v) = (6, 2, -4) = 2v$

et comme $u \neq 0$ alors 0 est valeur propre de f et de même 2 est également valeur propre de f. Et comme il n'y en a pas d'autres possibles

Conclusion : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont 0 et 2.}}$

c) Comme 0 est valeur propre de f, f n'est pas bjective.

Conclusion : $\boxed{f \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$

2. On considère le vecteur $w = (-2, 0, 1)$

   a) On montre que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est libre :
   Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
   Si $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ alors $\left\{\begin{array}{c} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{c} \alpha = -\beta \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right.$ et $\alpha = \beta = \gamma = 0.$
   (u, v, w) est donc une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (dimension 3)
   Conclusion : $\boxed{\text{La famille } \mathcal{C} = (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

   b) On a $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f(w)) = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   Donc $f(w) = (-1, 1, 0)$
   Méthode : pour exprimer $(-1, 1, 0)$ comme cmobinaison linéaire de v et de w, on peut chercher x et y réels tels que $(-1, 1, 0) = xv + yw$ (à traduire sur les composantes)
   On peut aussi s'inspirer de la question suivante : si la matrice de f dans la base (u, v, w) est bien T alors les coordonénes de $f(w)$ sont $(0, 1, 2)$ et $f(w) = v + 2w$. Ce qu'il suffit de vérifier !
   $v + 2w = (3, 1, -2) + 2(-2, 0, 1) = (-1, 1, 0) = f(w)$
   Conclusion : $\boxed{\text{On a donc } f(w) = v + 2w}$
   On a les coordonnées de l'image de u par : $f(u) = 0 = 0u + 0v + 0w$ qui a donc pour coordonénes $(0, 0, 0)$.
   Et de même $\text{coord}_{\mathcal{C}}(f(v)) = (0, 2, 0)$ et $\text{coord}_{\mathcal{C}}(f(w)) = (0, 1, 0)$
   Conclusion : $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans } (u, v, w) \text{ est bien } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

   c) Pour savoir si f est diagonalisable ou pas, on regarde si sa matrice associée T l'est ou non (plus facile à voire que sur A)
   $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} 2y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{array}\right. \iff y = z = 0$
   donc le sous espace propre de T associé à la valeur propre 0 est $E_0 = \text{Vect}((1, 0, 0))$.
   Ce vecteur étant non nul, il est libre et donc $\dim(E_0) = 1$
   $(T - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} -2x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right. \iff x = z = 0.$
   Donc le sous espace propre de T associé à la valeur propre 2 est $E_2 = \text{Vect}((0, 1, 0))$.
   Ce vecteur étant non nul, il est libre et donc $\dim(E_2) = 1$
   La somme des dimension des sous espaces propres est $2 \neq 3$ l'ordre de T.
   Donc T n'est pas diagonalisbale
   Conclusion : $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

3. a) On pose $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   On a $N^2 = 0$ et donc $N^k = 0$ si $k \geq 2$

et comme $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = DN$ alors

$$\begin{aligned} (D+N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} 0 \text{ valvble pour } n \geq 2 \text{ et pour } n = 1 \\ &= \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ non nul, on a } T^n = D^n + nD^{n-1}N}$

b) On a $ND^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (qui n'est pas valable pour $n = 0$)

c) Soit P la matrice de passage de la base canonique dans la base (u, v, w) alors $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \, \text{mat}_{\mathcal{C}}(f) \, \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ donc

Conclusion : $\boxed{A = PTP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$

On détermine P^{-1} par Gauss :

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 2L_2 \to L_2 \\ L_2 \to L_1 \\ L_3 + 2L_2 \to L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; L_1 - L_2 \to L_1 \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 2L_3 \to L_1 \\ L_2 + 2L_3 \to L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$

d) Par récurrence : $PT^0P = I = A^0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PT^nP^{-1}$ alors $A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^{n+1}P$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, on a : } A^n = PT^nP^{-1}}$

e) On alors pour tout $n \geq 1$:

$A^n = P2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2n+4 & n+4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

et $A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 6 & 6n+4 & 3n+8 \\ 2 & 2n+4 & n+4 \\ -4 & -4n-4 & -2n-6 \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$ et $A^0 = I$

Exercice 3

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+x)^2}dx$ est impropre en $+\infty$.

   $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^M = 1 - \frac{1}{1+M} \to 1$ quand $M \to +\infty$.

   Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+x)^2}dx \text{ converge et est égale à } 1}$

2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.

   a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{1}{2(1+|-x|)} = f(x)$.

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est paire.}}$

   b) f est continue sur $\mathbb{R}$ car $1+|x| \neq 0$.
   f est positive sur $\mathbb{R}$.
   Comme f est paire et que $\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+x)^2}dx = \frac{1}{2}$ alors $\int_{-\infty}^0 f$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.
   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1.

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ admettant f comme densité.
On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

   a) Comme $1+|X| \geq 1$ alors $\ln(1+|X|) \geq 0$ et $Y(\Omega) = [0, +\infty[$.

   b) Pour tout réel x, on a $G(x) = \mathrm{P}(Y \leq x)$
   avec $(Y \leq x) = (1+|X| \leq e^x) = (|X| \leq e^x - 1) = \emptyset$ si $e^x < 1$ et $= (-e^x + 1 \leq X \leq e^x - 1)$ si $x \geq 0$
   et comme $-e^x + 1 \leq e^x - 1$ dans ce cas alors
   $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(e^x - 1) - F(e^x - x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

   c) G est donc continue sur $]-\infty, 0[$
   Et comme F est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction de répartition de variable à densité) alors G est continue sur $[0, +\infty[$
   En 0^- : $G(x) = 0 \to 0$ et $G(0) = F(0) - F(0) = 0$ donc G est continue sur $\mathbb{R}$.
   G est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (car F C^1 sur $\mathbb{R}$)

   Conclusion : $\boxed{Y \text{ est à densité}}$

   Une densité est donnée par $g(x) = G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x f(e^x - 1) + e^x f(1 - e^x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et comme f est paire, $f(1-e^x) = f(e^x - 1)$

   Conclusion : $\boxed{\text{une densité est : } g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

d) Pour $x \geq 0 : e^x - 1 \geq 0$ donc $|e^x - 1| = e^x - 1$ et $f(e^x - 1) = \dfrac{1}{2(1 + e^x - 1)^2} = \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

Donc pour $x \geq 0 : g(x) = 2\frac{1}{2}e^x e^{-2x} = e^{-x}$

Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \varepsilon(1)}$

Problème Difficile

Partie 1 : préliminaires

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

a) f étant C^1, f' est continue sur le segment $[0, 1]$. Elle est donc bornée.

Donc il existe un réel M tel que, pour tout $x \in [0, 1] : |f'(x)| \leq Mf$

Et l'inégalité des accroissements finis donne alors pour tout $x, y \in [0, 1]$

Conclusion : $\boxed{|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [[0, n-1]]$, on a $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n} \in [0, 1]$

Donc $\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a t et $\frac{k}{n} \in [0, 1]$ donc $\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$

c) On écrit $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ sous forme d'intégrale : $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt$ intégrale d'une constante.

Donc $\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) dt\right| \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dt$ car $\frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n}$

$\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} M\left(t - \frac{k}{n}\right) dt = \left[\frac{M}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} = \frac{M}{2n^2}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [[0, n-1]], \ \left|\displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}}$

d) On découpe $\int_0^1 f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt$ et il vient par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(t)\, dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|\int_0^1 f(t)\, dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n}}$

e) Et quand $n \to +\infty$: $\frac{M}{2n} \to 0$ et par encadrement ($|| \geq 0$) $\int_0^1 f(t)\, dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to 0$.

Conclusion : $\boxed{\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \to \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt.}$

2. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1 - x)^q\, dx$

a) Méthode : Pour modifier des puissances dans une intégrale, on intègre par parties.
$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$ et $I(p+1, q-1) = \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} \, dx$.
Soit $u'(x) = x^p : u(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} : v(x) = (1-x)^q : v'(x) = -q(1-x)^{q-1}$ avec u et v C^1 car $q - 1 \geq 0$
donc

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} (1-x)^q\right]_0^1 - \int_0^1 -q(1-x)^{q-1} \frac{1}{p+1} x^{p+1} dx \\ &= 0 - 0 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p+1} dx \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).}$

b) On a alors par récurrence sur q :
pour $q = 0$: $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{p!0!}{(p+0)!} I(p+0, 0) = I(p, 0)$
Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}, \quad (p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$
alors $I(p, q+1) = \dfrac{q+1}{p+1} I(p+1, q)$ car $q + 1 \geq 1$ donc (HR)

$$\begin{aligned} I(p, q+1) &= \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0) \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0) \end{aligned}$$

et par récurrence,

Conclusion : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0).}$

c) On a $I(p+q, 0) = \displaystyle\int_0^1 x^{p+q} dx = \left[\frac{1}{p+q+1} x^{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$ donc
$I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0) = \dfrac{1}{p+q+1} \dfrac{p!q!}{(p+q)!}$

Conclusion : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.}$

3. Informatique.
Compléter la déclaration récursive suivante afin qu'elle permette le calcul de $I(p,q)$:
On utilise la relation de récurrence $I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$ initialisée par $I(p,0) = \frac{1}{p+1}$ si $q = 0$.

```
Function i(p, q : integer ) : real ;
Begin
If q = 0 then i :=1/(p+1) else i :=q/(p+1)*i(p+1,q-1) ;
End ;
```

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.

On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right\}$
On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[[0, n-1]]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left(U_n = \frac{k}{n}\right)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$.

1. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$.
   On a alors $E(Y) = mp$ et $V(Y) = mp(1-p)$.
   Or $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ donc $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = mp(1-p) + m^2p^2 = mp(1-p+mp)$
   et $E(Y(Y-1)) = E(Y^2 - Y) = E(Y^2) - E(Y) = mp(1-p+mp) - mp$
   Conclusion : $\boxed{E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2}$
2. Pour $k = 0$ la loi de $X_{1/U_1=0}$ est $\mathcal{B}(m, 0)$ donc $\mathrm{P}_{U_1=0}(X_1 = 0) = 1$
   Et comme U_1 suit une loi uniforme sur $\{0\}$, $\mathrm{P}(U_1 = 0) = 1$.
   Donc $\mathrm{P}(X_1 = 0) = \mathrm{P}(U_1 = 0 \cap X_1 = 0) = \mathrm{P}(U_1 = 0)\,\mathrm{P}_{U_1=0}(X_1 = 0) = 1$.
   Conclusion : $\boxed{X_1 \text{ est égale à 0 presque surement.}}$

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. a) Quand $U_n = k$ (l'univers restreint) la loi de X_n est $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$ donc $X_n(U_n = k) = [[0, m]]$
   Et comme $\Omega = \cup_{k=0}^{n-1}(U = k)$ alors $X_n(\Omega) = \cup_{k=0}^{n-1}[[0, m]]$
   Conclusion : $\boxed{X_n(\Omega) = [[0, m]]}$
   Pour tout $i \in [[0, m]]$, $\left(U_n = \frac{k}{n}\right)_{k\in[[0,n-1]]}$ est un système complet d'événement donc

$$\mathrm{P}(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(U_1 = k)\,\mathrm{P}_{U_1=k}(X_n = i)$$

   avec$\mathrm{P}(U_1 = k) = \frac{1}{n}$ (loi uniforme sur n valeurs) et $\mathrm{P}_{U_1=k}(X_n = i) = \binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-i}$ (loi $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$) donc

$$\mathrm{P}(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

   b) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$ alors $E(Y) = m\frac{k}{n}$ et

$$\begin{aligned} m\frac{k}{n} &= \sum_{i=0}^{m} i\mathrm{P}(Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} = m\frac{k}{n}}$

et donc

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{i=1}^{m} i\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \text{ interversion des } \sum \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} i\frac{1}{n}\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}m\frac{k}{n} \\
&= \frac{m}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}}$

c) On a, par le théorème de transfert, pour $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\,\mathrm{P}(Y=i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = m(m-1)\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

Donc

$$\begin{aligned}
E[X_n(X_n-1)] &= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\,\mathrm{P}(X_n=i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} i(i-1)\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i} + 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{m(m-1)}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \frac{m(m-1)}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E[X_n(X_n-1)] = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}}$

d) On a $E\left[X_n\left(X_n-1\right)\right]=E\left(X_n^2\right)-E\left(X_n\right)$ donc

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= E\left[X_n\left(X_n-1\right)\right]+E\left(X_n\right) \\ &= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}+\frac{m(n-1)}{2n} \\ &\text{et} \\ V(X) &= E\left(X^2\right)-E(X)^2 \\ &= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}+\frac{m(n-1)}{2n}-\left[\frac{m(n-1)}{2n}\right]^2 \\ &= \frac{m(n-1)}{12n^2}\left[2(m-1)(2n-1)+6n-3m(n-1)\right] \\ &= \frac{m(n-1)}{12n^2}\left[m+2n+mn+2\right] \text{ et on constate} \\ &= \frac{m(n-1)}{12n^2}(m+2)(n+1) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(X)=\dfrac{m(m+2)\left(n^2-1\right)}{12n^2}}$

4. a) Pour $i\in[[0,m]]$, on avait trouvé$\mathrm{P}\left(X_n=i\right)=\dfrac{1}{n}\dbinom{m}{i}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$

On y reconnaît une somme de Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} &= \binom{m}{i}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\ &= \binom{m}{i}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

avec pour tout $x\in[0,1]$: $f(x)=(x)^i(1-x)^{m-i}$ de classe C^1 sur $[0,1]$ car $m-i\in\mathbb{N}$; on a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 x^i(1-x)^{m-i}\,dx &= I(i,m-i) \\ &= \frac{i!\,(m-i)!}{(m+1)!} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\to\frac{i!\,(m-i)!}{(m+1)!}\binom{m}{i}=\frac{1}{m+1}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } i \text{ de } X_n(\Omega) : \lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(X_n=i\right)=\tfrac{1}{m+1}}$

b) *Conclusion :* $\boxed{\text{la suite } (X_n) \text{ converge donc en loi vers variable aléatoire } X \text{ de loi } \mathcal{U}_{[[0,m]]}}$

c) On a $E(X)=\frac{m}{2}$ et $V(X)=\dfrac{(m+1)^2-1}{12}$ (hors programme)

et $E\left(X_n\right)=\dfrac{m(n-1)}{2n}=\dfrac{m(1-1/n)}{2}\to\dfrac{m}{2}$

et $V\left(X_n\right)=\dfrac{m(m+2)\left(n^2-1\right)}{12n^2}=\dfrac{m(m+2)\left(1-1/n^2\right)}{12}\to\dfrac{m(m+2)}{12}$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}E\left(X_n\right)=E(X) \text{ et } \lim_{n\to+\infty}V(X_n)=V(X).}$