Corrigé EDHEC 2003 voie Eco par Pierre Veuillez

Exercice 1

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. a) I_n est impropre en $+\infty$ (car f continue sur $]0,+\infty[$)
   $\int_n^M \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_{x=n}^M = -e^{\frac{1}{M}} + e^{\frac{1}{n}} \to e^{\frac{1}{n}} - 1$ quand $M \to +\infty$ donc I_n converge et est égale à $I_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$

   b) Or $e^x - 1 \sim x$ quand $x \to +\infty$ et comme $\dfrac{1}{n} \to 0$ alors $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. On a $\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et comme la série des $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Rieman) alors, par réquivalence de séries à termes positifs, la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. a) Pour encadrer l'intégrale, on encadre tout d'abord f et pour celà, on détermine son sens de variations :
   f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}x^2 - 2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{-(1+2x)\,e^{\frac{1}{x}}}{x^4} < 0 \text{ sur }]0,+\infty[$$

   donc pour $0 < k \le x \le k+1$ on a $f(k) \ge f(x) \ge f(k+1)$ ($f(k)$ et $f(k+1)$ constantes par rapport à x) et l'inégalité de la moyenne donne alors comme $k \le k+1$:

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k).$$

   (ou en intégran,t l'inégalité **par raport à** x)

   b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :
   On somme alor sl'inégalité précédente de n à M :

$$\sum_{k=n}^{M} f(k+1) \leqslant \sum_{k=n}^{M} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{M} f(k)$$

   réindexé $h = k+1$ pour la première somme donc

$$\sum_{h=n+1}^{M+1} f(h) \leqslant \int_n^{M+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{M} f(k) + f(n)$$

   et par passage à la limiet dans les inégalités (les séries et l'intégerale convergent quand $M \to +\infty$)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

c) On a alors le double encadrement :

$$I_n - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n$$

et en divisant par I_n qui tend vers $+\infty$,

$$1 - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2 I_n} \leq \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}{I_n} \leqslant 1$$

par encadrement $\frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}{I_n} \to 1$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2} \sim I_n \sim \frac{1}{n} \text{ quand } n \to +\infty}$

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et positive.
   $\int_{-\infty}^{0} f_n = 0$ et $\int_1^{+\infty} f_n = 0$ enfin, $\int_0^1 t^n dt = [t^n]_0^1 = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ converge et vaut 1 donc f_n est bien une densité de proabilité.

2. On considère une variable aléatoire X_n réelle dont une densité de probabilité est f_n. On dit alors que X_n suit une loi monôme d'ordre n.

   a) La densité de X_1 est 1 sur $[0,1]$ *et* 0 ailleurs. Donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$

   b) La fonction de répartition de de X_n est définie par : $F_n(x) = p(X_n \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_n$ donc

   - si $x \leq 0$ alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$
   - si $0 \leq x \leq 1$ alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^x nt^{n-1} dt = [t^n]_0^x = x^n$
   - si $x \geq 1$ alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^1 nt^{n-1} dt + \int_1^{+\infty} 0 = 1$

   Pour son espérance :

   - $\int_{-\infty}^{x} t\, f_n(t)\, dt = 0$ et $\int_1^{+\infty} t\, f_n(t)\, dt = 0$
   - $\int_0^1 t\, f_n(t)\, dt = \int_0^1 n\, t^{\,n} dt = \left[\frac{n}{n+1} t^{n+1}\right]_{t=0}^{1} = \frac{n}{n+1}$
   - Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\, dt$ converge et vaut $E(X_n) = \frac{n}{n+1}$

   De même $E(X_n^2) = \int_0^1 t^{\,2} f_n(t)\, dt = \int_0^1 n\, t^{\,n+1} dt = \left[\frac{n}{n+2} t^{n+2}\right]_{t=0}^{1} = \frac{n}{n+2}$
   et donc X_n a une variance qui est

$$\begin{aligned} V(X_n) &= E\left(X_n^2\right) - E(X_n)^2 = \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = n\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \\ &= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} \end{aligned}$$

3. On considère deux variables aléatoires U_n et V_n définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi monôme d'ordre n $(n \geqslant 2)$ et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P\left(U_n \leqslant x \cap V_n \leqslant x\right) = P\left(U_n \leqslant x\right) P\left(V_n \leqslant x\right)$$

On pose $M_n = \sup\left(U_n, V_n\right)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) "le plus grand des deux est inférieur à x" signifie que "tous les deux sont inférieurs à x"
Donc $(M_n \leqslant x) = (U_n \leqslant x) \cap (V_n \leqslant x)$.

b) Donc la fonction de répartition G de M_n vérifie :
$G(x) = \mathrm{P}(M_n \leqslant x) = \mathrm{P}(U_n \leqslant x)\,\mathrm{P}(V_n \leqslant x)$ car U_n et V_n sont indépendantes et $G(x) = F_n^2(x)$

- G est donc continue sur $\mathbb{R}$ car F_n l'est
- G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ puisque F_n l'est là où f_n est continue.

Donc M_n est à densité et a pour densité g_n :

$$\begin{aligned} g_n(x) &= G_n'(x) = 2F_n(x)\,F_n'(x) = 2F_n(x)\,f_n(x) \\ &= \begin{cases} 2x^n n x^{n-1} = 2nx^{2n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc M_n suit une loi monôme d'ordre $2n-1$ (≥ 1 car $n \geq 1$)et donc $E(M_n) = \frac{2n}{2n+2}$ d'après 2b.

c) On pose $T_n = \inf(U_n, V_n)$.
Comme M_n est le plus grand et T_n le plus grand, l'un est l'un et l'autre l'autre.
Donc $M_n + T_n = U_n + V_n$ et donc
$T_n = U_n + V_n - M_n$ (qui ont toutes une espérance) et $E(T_n) = E(U_n) + E(V_n) - E(M_n)$

Exercice 3

1.

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$e^x - 1$		$\nearrow -$	0	$+ \nearrow$	
$\dfrac{e^x-1}{x}$		$+$	0	$+$	

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \dfrac{e^x-1}{x} > 0.$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $x \neq 0$ et $\dfrac{e^x-1}{x} > 0$ comme composée de fonctions continues.
En 0 : $e^x - 1 \sim x$ donc $\dfrac{e^x-1}{x} \to 1$ et $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) \to 0$ donc $f(x) \to f(0)$ donc f est continue en 0
Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. f est de classe C^1 sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions C^1 et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} \frac{e^x x - (e^x-1)}{x^2} \\ &= \frac{e^x(x-1)+1}{x(e^x-1)} \end{aligned}$$

pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

4. a) On utilise le développment limité de exp en 0 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$

Pour $x \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{e^x(x-1)+1}{x(e^x-1)} \\
&= \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)(x-1)+1}{x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)-1\right)} \\
&= \frac{x+x^2-1-x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)+1}{x^2(1+\varepsilon_1(x))} \\
&= \frac{\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)}{x^2(1+\varepsilon_1(x))} = \frac{\frac{1}{2}+\varepsilon_2(x)}{1+\varepsilon_1(x)} \\
&\to \frac{1}{2} \text{ quand } x \to 0
\end{aligned}$$

b) Donc f est continue su $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 et $f'(x) \to 1/2$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 1/2$

5. a) Etudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x\,e^x - e^x + 1$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = x\,e^x + e^x - e^x = x\,e^x$ d'où ses variations :

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow +$	0	$+ \nearrow$	

et son signe

b) Comme, pour $x \neq 0$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(e^x-1)}$ alors

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	
e^x-1		$\nearrow -$	0	$+ \nearrow$	
$f'(x)$		$+$	$1/2$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -$	0	$+ \nearrow$	$+\infty$

En $+\infty$: $x = o(e^x)$ donc $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x\left[1-e^{-x}\right]}{x} \to +\infty$

En $-\infty$: $\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \to -\infty$

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Par récurrence :

- $u_0 > 0$.
- Soit $n \geq 0$ tel que $u_n > 0$ alors $f(u_n) > 0$ car $f > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc $u_{n+1} > 0$
- Donc pour tout entier n, $u_n > 0$

7. a) Pour $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
f(x) - x &= \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x x}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right) = f(-x)
\end{aligned}$$

b) Donc pour $x > 0$, $-x < 0$ et $f(-x) < 0$ d'après le tableau des variations de f et $f(x) - x < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Comme pour tout n, $u_n > 0$ alors $f(u_n) - u_n < 0$ et $u_{n+1} < u_n$
La suite (u_n) est donc décroissante.

8. La suit u est donc décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$

   Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue en ℓ et donc $f(\ell) = \ell$.

   Comme $f(x) - x = f(x)$ et ne s'annulle qu'en 0, on a donc $\ell = 0$

   Donc la suite u converge vers 0 en $+\infty$.

9. Écrire un programme en `Pascal` permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.

   Il faut ici faire calculer u_n et n -puisque c'est lui que l'on demande- tant que u_n est supérieur 10^{-3}. Le premier n qui ne vérifiera pas cette condition sera celui recherché.

```
program suite;
var u:real;n:integer;
function f(x:real):real;
begin f:=ln((exp(x)-1)/x) end;
begin
    u:=1;n:=0;
    while u > 1E-3 do
    begin u:=f(u);n:=n+1 end;
    writeln(n);
end.
```

PROBLÈME

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

   a) Avec le SCE précédent, on a :
   $\mathrm{P}(E_{n+1}) = \mathrm{P}_{E_n}(E_{n+1})\,\mathrm{P}(E_n) + \mathrm{P}_{F_n}(E_{n+1})\,\mathrm{P}(F_n) + \mathrm{P}_{G_n}(E_{n+1})\,\mathrm{P}(G_n) + \mathrm{P}_{H_n}(E_{n+1})\,\mathrm{P}(H_n)$
   Hors, quand G_n est réalisé, on a $\overline{A_n}$, donc $E_{n+1} = A_{n-1} \cap A_n$ n epeut pas être réalisé, et $\mathrm{P}_{G_n}(E_{n+1}) = 0$
   De même $\mathrm{P}_{H_n}(E_{n+1}) = 0$

   Si E_n est réalisé, il a gagné en $n-1$ et n donc il gagnera la suivante avec une probabiltié de $\dfrac{2}{3}$.
   Comme $E_{n+1} = A_n \cap A_{n+1}$ alors $\mathrm{P}_{E_n}(E_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$
   Si F_n est réalisé, il a perdu en $n-1$ et gagné n donc il gagnera la suivante avec une probabiltié de $\dfrac{1}{2}$ alors $\mathrm{P}_{F_n}(E_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$
   Finalment, $\mathrm{P}(E_{n+1}) = \dfrac{2}{3}\mathrm{P}(E_n) + \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(F_n)$ pour $n \geq 2$

b) De la même façon (N.B. ol'énnoncé donne le résultat juste en dessous ! il suffit de le recopier puisque "aucune explication n'est exigée"

- $\mathrm{P}(F_{n+1}) = \mathrm{P}\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \dfrac{1}{3}\mathrm{P}(H_n)$
- $\mathrm{P}(G_{n+1}) = \mathrm{P}\left(A_n \cap \overline{A_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{3}\mathrm{P}(E_n) + \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(F_n)$
- $\mathrm{P}(F_{n+1}) = \mathrm{P}\left(\overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \dfrac{2}{3}\mathrm{P}(H_n)$

c) On a $U_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(E_{n+1}) \\ \mathrm{P}(F_{n+1}) \\ \mathrm{P}(G_{n+1}) \\ \mathrm{P}(H_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(F_n) \\ \frac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \frac{1}{3}\mathrm{P}(H_n) \\ \frac{1}{3}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(F_n) \\ \frac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \frac{2}{3}\mathrm{P}(H_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$

Donc $U_{n+1} = MU_n$

2. a) On a $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I$

Donc $P\frac{1}{10}Q = I$ et P inversibled'inverse $P^{-1} = \frac{1}{10}Q$

b) $MC_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}C_1$

$MC_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}C_2$

$MC_3 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}C_3$

$MC_4 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C_4$

Donc $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}$ et 1 sont 4 valeurs propres de M distinctes. Comme elle ne peut pas en avoir plus, ce sont les seules.

c) Et M étant de taille 4, elle est alors diagonailisable avec la matrice P obtenue en concaténant les quatre colonnes propres :

avec $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $M = P\,D\,P^{-1}$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a) Pour $n = 0$, on a $M^0 = I = P\,I\,P^{-1} = PD^0P^{-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n = PD^nP^{-1}$ alors

$M^{n+1} = M^nM = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = P\,D^{n+1}P^{-1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.

b) Pour $n=2$, on a $M^{2-2}U_2 = I\,U_2 = U_2$

Soit $n \geq 2$ tel que rence, que $U_n = M^{n-2}U_2$ alors $U_{n+1} = M\,U_n = M\,M^{n-2}U_2 = M^{n-1}U_2$

Donc $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.

c) **N.B.** il est inutile de calculer le produit $M^n = PD^nP^{-1}$ entier. Il suffit d'en calculer la première colonne. Et pour celà de faire le produit par la première colonne de gauche à droite. M^n a pour première colonnne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{pmatrix}$$

et commme $U_n = M^{n-2}U_2$ et que $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puique'il a gagné les deux premières parties, U_n est alors la première colonne de M^{n-2} d'où

- $\mathrm{P}\left(E_n\right) = \frac{1}{10}\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right)$,
- $\mathrm{P}\left(F_n\right) =, \frac{1}{10}\left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right)$
- $\mathrm{P}\left(G_n\right) = \frac{1}{10}\left(-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right)$ et
- $\mathrm{P}\left(H_n\right) = \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right)$

d) Et quand $n \to +\infty$, comme $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ ont des valeurs absolues strictment inférieures à 1 alors$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. Et donc

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(E_n\right) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(F_n\right) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(G_n\right) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(H_n\right) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

a) Pour gagner la $k^{i\grave{e}me}$ partie, le joueur peut avoir gagné ou perdu la $k-1^{\grave{e}me}$ donc $A_k = E_k \cup F_k$

b) Comme les deux sont incompatibles,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_k = 1\right) &= \mathrm{P}\left(A_k\right) = \mathrm{P}\left(E_k\right) + \mathrm{P}\left(F_k\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right), \end{aligned}$$

et donc X_k suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right)$

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

   a) **N.B.** Ici, les parties ne sont pas indépendantes, donc S_n ne suit pas une loi géométrique !
   Comme le joueur a gagné ses deux premières parties
   Pour $n = 2$, on a $S_n = 2$ qui est l'événement certain donc $\mathrm{P}(S_2 = 2) = 1$
   Pour $n = 3$, comme le joueur a gagné les deux premières parties, $(S_3 = 2) = \overline{A_3}$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_3 = 2) &= 1 - \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 5\right) \\
&= 1 - \frac{1}{10}\left(\frac{-2+12+30}{6}\right) = 1 - \frac{40}{10 \cdot 6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   et pour $n \geq 4$, $(S_n = 2)$ signifie qu'il n'a pas gangé d'autre partie que les deux première donc $(S_n = 2) = \bigcap_{k=3}^{n} \overline{A_k}$ donc (les parties ne sont pas indépendantes)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_n = 2) &= \mathrm{P}\left(\overline{A_3}\right) \mathrm{P}_{\overline{A_3}}\left(\overline{A_4}\right) \mathrm{P}_{\overline{A_3} \cap \overline{A_4}}\left(\overline{A_5}\right) \dots \mathrm{P}_{\overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}}\left(\overline{A_n}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

   car quand on perd les deux précédentes, la probabiltié de perdre la suivante est de $\frac{2}{3}$
   La probabilité est de $2/3$ de la $5^{\text{ième}}$ à la $n^{\text{ième}}$ partie donc $k - 5 + 1 = n - 4$ fois. Et
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(S_n = 2) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4} \text{ pour } n \geq 4}$

   b) $(S_n = n)$ signifie que le joueur a gagné toutes ses parties donc $(S_n = n) = \bigcap_{k=3}^{n} A_k$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_n = n) &= \mathrm{P}(A_3) \mathrm{P}_{A_3}(A_4) \mathrm{P}_{A_3 \cap A_4}(A_5) \dots \mathrm{P}_{A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

   car le conditionnement précise qu'il a gagné à chaque fois les deux parties précédentes.
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(S_n = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}$.

   c) X_k compte le nomber de victoire pour la $k^{\text{ième}}$ partie, donc le nombre total de victoires est $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \sum_{k=3}^{n} E(X_k) \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right) \\
&= 2 + \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n-2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k} + \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} + \frac{n-2}{2} \\
&= \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 1}{-\frac{1}{3} - 1} + \frac{2}{5}\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{40}\left(9\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} - 1\right) - \frac{2}{5}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 1\right) \\
&= \frac{n}{2} + \frac{11}{8} + \frac{9}{40}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} - \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$