

* Banque filière PT *

Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

L'usage des machines à calculer est interdit.

Ce problème provient de l'étude du phénomène de cavitation (c'est-à-dire de la formation d'une cavité) à l'intérieur d'une boule remplie d'un matériau incompressible et soumise à certains types d'effort.

On sera amené à considérer une application f de $\mathbb{R}^3$ privé de $O = (0, 0, 0)$ dans lui-même et à étudier quelques propriétés faisant intervenir la matrice jacobienne de f .

Notations:

- $B_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: base canonique de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne,
 (O, B_0) : repère canonique de $\mathbb{R}^3$,
 E : $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine $O = (0, 0, 0)$,
 $\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$: matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,
 $\mathcal{F}$: ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$,
 $\mathcal{F}^+$: ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.

Rappel d'une formule de calcul d'une intégrale de surface:

Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $(u, v) \mapsto P(u, v)$, où (u, v) décrit une partie D de $\mathbb{R}^2$ suffisamment régulière. Soit f une fonction continue définie sur Σ . Le calcul de l'intégrale de f sur la surface Σ peut être obtenu par la formule suivante:

$$\iint_{\Sigma} f(P) d\sigma = \iint_D f(P(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{OP}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v} \right\| du dv.$$

I. Première partie

1. Soit $m = (x_1, x_2, x_3)$ un élément de E . On rappelle qu'il existe au moins un triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ formant un système de coordonnées sphériques de m , c'est-à-dire vérifiant:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

- a. On pose alors pour tout triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3, \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_2 - \sin \theta \vec{e}_3, \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Vérifier que $\mathcal{B} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.

- b. Lorsque m est un élément de E tel que $x_1 x_2 x_3 \neq 0$, représenter sur un dessin $r, \theta, \varphi, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$.

2. L'application f de E dans lui-même est définie par la relation:

$$\overrightarrow{Of(m)} = \frac{\rho(r)}{r} \overrightarrow{Om},$$

où ρ est un élément de $\mathcal{F}^+$.

Soit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui associe à t le triplet $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$. Soit $m(t)$ le point de coordonnées sphériques $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$ et $M(t) = f(m(t))$ son image par f .

- a. Donner les composantes dans la base $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{Om(t)}}{dt}$, notées (v_1, v_2, v_3) , et celles de $\overrightarrow{V(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$, notées (V_1, V_2, V_3) .

- b. Prouver que l'unique matrice J indépendante de la fonction $t \mapsto (r(t), \theta(t), \varphi(t))$ telle que

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

est la matrice $\text{Diag} \left(\rho'(r), \frac{\rho(r)}{r}, \frac{\rho(r)}{r} \right)$.

3. On admet que l'incompressibilité du matériau se traduit par $\det J = 1$ pour tout élément m de E . Montrer que cette condition est réalisée si, et seulement si, il existe un réel a positif ou nul tel que pour tout réel $r > 0$, on ait la relation $\rho(r)^3 = r^3 + a^3$.

4. Soit f_a l'application associée à la fonction ρ_a définie par $\rho_a(r) = \sqrt[3]{r^3 + a^3}$.

L'application f_a est-elle injective?

L'application f_a est-elle surjective? Lorsque f_a n'est pas surjective, préciser le sous-ensemble de E qui n'est pas dans l'image de f ; dans ce cas, on dit que se produit le phénomène de cavitation.

L'application f_a peut-elle être prolongée par continuité en $O = (0, 0, 0)$?

II. Deuxième partie

L'application étudiée f de E dans lui-même, $m = (x_1, x_2, x_3) \mapsto M = (X_1, X_2, X_3)$, est dorénavant donnée par $X_i = \psi_i(r) x_i$ pour $1 \leq i \leq 3$, où r désigne $\|\overrightarrow{Om}\|$ et où les fonctions ψ_i sont des éléments de $\mathcal{F}^+$. Dans une telle situation, on dit que la déformation est triaxiale.

1. a. Ecrire la matrice jacobienne J_0 de l'application f .
- b. Montrer que, lorsque α, β et γ sont des réels, on a, pour tout triplet $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$, la relation:

$$\alpha^2 \det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) = \det(\overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_2} - \beta \overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_3} - \gamma \overrightarrow{V_1}).$$

Pour $x_1 \neq 0$, en déduire l'égalité:

$$\det(J_0) = \frac{1}{x_1^2} \begin{vmatrix} \psi_1'(r) \frac{x_1^2}{r} + \psi_1(r) & -x_2 \psi_1(r) & -x_3 \psi_1(r) \\ \psi_2'(r) \frac{x_1 x_2}{r} & x_1 \psi_2(r) & 0 \\ \psi_3'(r) \frac{x_1 x_3}{r} & 0 & x_1 \psi_3(r) \end{vmatrix}$$

- c. Calculer $\det(J_0)$ pour m tel que x_1 est non nul, puis pour tout élément m de E .
2. L'incompressibilité s'exprimant toujours par la relation $\det(J_0) = 1$ en tout m de E , montrer que cette condition est réalisée si et seulement si ψ_1, ψ_2 et ψ_3 vérifient pour tout réel $r > 0$ les trois conditions suivantes:

$$\psi_1'(r) \psi_3(r) - \psi_1(r) \psi_3'(r) = 0, \quad (C_1)$$

$$\psi_2'(r) \psi_3(r) - \psi_2(r) \psi_3'(r) = 0, \quad (C_2)$$

$$\psi_1(r) \psi_2(r) \psi_3(r) + r \psi_1(r) \psi_2(r) \psi_3'(r) = 1. \quad (C_3)$$

3. On suppose ces trois conditions C_1, C_2 et C_3 réalisées.
 - a. Montrer l'existence de deux réels λ et μ strictement positifs tels que $\psi_1 = \lambda \psi_3$ et $\psi_2 = \mu \psi_3$.
 - b. On note Z la fonction $\psi_1 \psi_2 \psi_3$, élément de $\mathcal{F}^+$. Calculer $rZ'(r) + 3Z(r)$ et en déduire Z .
4. Montrer que ψ_1, ψ_2 et ψ_3 sont des éléments de $\mathcal{F}^+$ réalisant les conditions C_1, C_2 et C_3 si, et seulement si, il existe un réel $a \geq 0$ et trois réels α_1, α_2 et α_3 strictement positifs tels que les relations suivantes soient vérifiées:

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1 \text{ et, pour tout } i, 1 \leq i \leq 3, \quad \psi_i(r) = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}.$$

Vérifier que la transformation f_a étudiée dans la première partie est la forme prise par la déformation triaxiale dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

III. Troisième partie

Soit ψ l'élément de $\mathcal{F}^+$ défini par $\psi(r) = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}$ où a est un paramètre réel strictement positif. Soit c un second paramètre réel strictement positif. On choisit les fonctions ψ_i définissant l'application f sous la forme $\psi_1 = c^{-2}\psi$ et $\psi_2 = \psi_3 = c\psi$.

1. Soit Σ l'image de la sphère unité $\{m, \|\overrightarrow{Om}\| = 1\}$ par l'application f .
 - a. Donner une équation cartésienne de Σ et préciser sa nature géométrique.
 - b. Montrer que les relations:

$$X_1 = \frac{b}{c^2} \cos \varphi, \quad X_2 = b c \sin \varphi \cos \theta, \quad X_3 = b c \sin \varphi \sin \theta,$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ et $b = \psi(1)$, constituent une paramétrisation de Σ .

- c. Calculer le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n(M)}$ en M à Σ tel que $\overrightarrow{n(M)} \cdot \overrightarrow{Om}$ est strictement positif.
2. Soient t_1 et t_2 deux réels. On définit alors en tout point M de Σ les vecteurs suivants:

$$\overrightarrow{g(M)} = \frac{t_2 - 2t_1}{3} \left(\overrightarrow{n(M)} \cdot \overrightarrow{e_1} \right) \overrightarrow{e_1} + \frac{t_1 + t_2}{3} \left(\left(\overrightarrow{n(M)} \cdot \overrightarrow{e_2} \right) \overrightarrow{e_2} + \left(\overrightarrow{n(M)} \cdot \overrightarrow{e_3} \right) \overrightarrow{e_3} \right),$$

$$\overrightarrow{V_1(M)} = \frac{\partial \overrightarrow{Om}}{\partial c} \text{ et } \overrightarrow{V_2(M)} = \frac{\partial \overrightarrow{Om}}{\partial a}.$$
 - a. Calculer $\overrightarrow{V_1(M)}$ et $\overrightarrow{V_2(M)}$.
 - b. Vérifier les égalités suivantes:

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_1(M)} d\sigma = \frac{8\pi b^3}{3c} t_1 \quad \text{et} \quad \iint_{\Sigma} \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_2(M)} d\sigma = \frac{4\pi a^2}{3} t_2.$$

3. Soit l'application W de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation:

$$W(c, a) = \frac{4\pi}{3} (2c^2 + c^{-4})(1 + 2a^3)(1 + a^3)^{-\frac{1}{3}}.$$

- a. Donner t_1 et t_2 en fonction de a pour que $\iint_{\Sigma} \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_1(M)} d\sigma = \frac{\partial W(a, c)}{\partial c}$ et $\iint_{\Sigma} \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_2(M)} d\sigma = \frac{\partial W(a, c)}{\partial a}$.
- b. Montrer que chacune des valeurs précédentes des deux dérivées partielles de W a une limite lorsque a tend vers 0 et préciser ces deux limites.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe plane, paramétrée par $c \in \mathbb{R}_+^*$, définie par:

$$x(c) = 2(c^2 - c^{-4}), \quad y(c) = 5(2c^2 + c^{-4}).$$

- a. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée minimale et préciser ses coordonnées.
- b. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ en précisant ses éventuelles asymptotes.
- c. La courbe $\mathcal{C}$ est-elle une conique ou est-elle contenue dans une conique?

IV. Quatrième partie

Soit W une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$: $(I_1, I_2) \mapsto W(I_1, I_2)$ et soient trois fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 de $\mathcal{F}^+$.

On pose $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2$ et on note W_1 la fonction composée telle que $W_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(I_1, I_2)$.

On introduit alors, pour $1 \leq i \leq 3$, les fonctions s_i de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par les relations:

$$\forall R > 0, s_i(R) = \lambda_i(R) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_i}(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R)) - h(R),$$

où h est un élément de $\mathcal{F}$. Le nombre a étant un réel strictement positif, les conditions mécaniques sont complètement décrites par le système suivant:

$$\begin{aligned} s_1'(R) + \frac{2}{R}(s_1(R) - s_2(R)) &= 0, \\ s_2(R) &= s_3(R), \\ s_1(a) &= 0. \end{aligned}$$

Enfin, on pose $P(a) = s_1(b)$, $\rho_a(r) = \sqrt[3]{r^3 + a^3}$ et $b = \rho_a(1)$.

1. Prouver rapidement que les fonctions s_i sont éléments de $\mathcal{F}$ et vérifier l'égalité suivante:

$$P(a) = \int_a^b \frac{2}{R} \left[\lambda_2(R) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R)) - \lambda_1(R) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R)) \right] dR.$$

2. On pose $r = \sqrt[3]{R^3 - a^3}$, $\lambda_1 = \rho_a'(r)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\rho_a(r)}{r}$ et $v = \frac{R}{r} = \frac{\rho_a(r)}{r}$.

Les expressions de $\lambda_1(R)$, $\lambda_2(R)$, $\lambda_3(R)$, $I_1(R)$ et $I_2(R)$ en fonction de v sont notées respectivement $\mu_1(v)$, $\mu_2(v)$, $\mu_3(v)$, $J_1(v)$ et $J_2(v)$. On désigne par Φ la fonction de $\mathcal{F}$ définie par $\Phi(v) = W(J_1(v), J_2(v)) = W_1(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v))$.

- a. Après avoir montré que $\mu_1(v)$, $\mu_2(v)$ et $\mu_3(v)$ sont des puissances entières positives ou négatives de v , vérifier la relation:

$$\Phi'(v) = \frac{2}{v} \left[\mu_2(v) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) - \mu_1(v) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) \right].$$

- b. En déduire la relation:

$$P(a) = \int_b^{+\infty} \frac{\Phi'(v)}{v^3 - 1} dv, \text{ avec } b = \sqrt[3]{1 + a^3}.$$

- c. Montrer alors que $P(a)$ a une limite réelle P lorsque a tend vers 0 si et seulement si l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{v^5} \frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) + \frac{1}{v^3} \frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v)) \right] (1 + v^3) dv$$

est convergente. Vérifier la relation $P = 4I$.

3. Soit $W(I_1, I_2) = (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j$ où $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ et $(i, j) \neq (0, 0)$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le couple (i, j) pour que le nombre P soit défini et le calculer.

Fin de l'épreuve.