

Le problème porte sur l'étude des équations qui régissent le mouvement d'une particule d'une fibre dans un fluide lui-même en mouvement.

Dans tout ce problème, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, sa base canonique B_0 est notée $\{\vec{e}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ et le repère associé est (O, B_0) .

Le produit scalaire de deux éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et la norme d'un élément $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$.

Première partie

Soit $\vec{f} : t \mapsto \vec{F}(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et a un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. On considère le système différentiel suivant :

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = a(\vec{F}) \quad (E)$$

- (a) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de (E) vérifiant une condition du type $\vec{F}(t_0) = \vec{F}_0$ où t_0 et $\vec{F}_0$ sont fixés ?
 (b) Soit $\vec{F}$ une solution de (E) . Montrer alors que s'il existe un réel t_0 tel que $\vec{F}(t_0) = \vec{0}$, $\vec{F}$ est la fonction nulle.

Dans la suite, on supposera toujours que $\vec{F}$ ne s'annule pas.

2. On définit alors les fonctions $\nu : t \mapsto \|\vec{F}(t)\|$ et $\vec{f} : t \mapsto \frac{1}{\nu(t)}\vec{F}(t)$

- (a) Montrer que ν et $\vec{f}$ sont des fonctions dérivables.
 (b) Vérifier alors que $\vec{f}(t)$ et $\vec{f}'(t)$ sont deux vecteurs orthogonaux pour tout réel t .
 (c) Calculer la dérivée de ν .

3. Montrer que si $\vec{F}$ vérifie le système (E) , la fonction vectorielle $\vec{f}$ vérifie le système différentiel :

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = a(\vec{f}) - (a(\vec{f}) \cdot \vec{f})\vec{f} \quad (e)$$

Deuxième partie

Soient deux réels $\lambda \in]-1, 1[$ et $G > 0$. On pose $r = \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$.

Dans la suite du problème, a est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B_0 est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & G(\lambda - 1) & 0 \\ G(\lambda + 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche $\vec{F}$ la solution de (E) vérifiant la condition initiale $\vec{F}(0) = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3$.

On pose $\vec{F}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$.

1. (a) Donner l'expression de $z(t)$.
 (b) Intégrer (E) lorsque $x_0 = y_0 = 0$.
 2. Montrer que $r^2 x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$ pour tout réel t . Que peut-on en déduire pour les courbes intégrales de (E) ?
 3. On pose $\omega = G\sqrt{1-\lambda^2}$.

- (a) Vérifier que x et y sont solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = 0.$$

- (b) Intégrer alors (E) lorsque $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$.
 (c) On suppose dans cette question que $x_0 \neq 0$. Vérifier qu'il existe une constante t_0 (à définir en fonction de x_0, y_0, r et ω) telle que :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = r \tan \omega(t - t_0)$$

lorsque t est au voisinage de 0.

Troisième partie

Soit $\vec{F}$ une solution de (E) ne s'annulant pas et $\vec{f}$ la fonction vectorielle unitaire associée, c'est-à-dire $\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\|\vec{F}\|}$.

On pose $f(\vec{t}) = \sin \theta(t) \cos \phi(t) \vec{e}_1 + \sin \theta(t) \sin \phi(t) \vec{e}_2 + \cos \theta(t) \vec{e}_3$ où θ et ϕ sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Les valeurs de $\vec{f}$, θ et ϕ en 0 seront notées f_0 , θ_0 et ϕ_0 .

1. (a) Illustrer par une figure la définition de $\theta(t)$ et $\phi(t)$.
 (b) Prouver que s'il existe t_0 tel que $\sin \theta(t_0) = 0$, alors $\sin \theta$ est la fonction identiquement nulle.
 (c) Prouver que s'il existe t_0 tel que $\cos \theta(t_0) = 0$, alors $\cos \theta$ est la fonction identiquement nulle.
 (d) Démontrer que s'il existe t_0 tel que $\sin 2\theta(t_0) = 0$, θ est une fonction constante.
2. Soient $u(\vec{t}) = \cos \phi(t) \vec{e}_1 + \sin \phi(t) \vec{e}_2$ et $v(\vec{t})$ le vecteur tel que $B_\phi(t) = (u(\vec{t}), v(\vec{t}), \vec{e}_3)$ soit une base orthonormale directe.
 (a) Écrire $f'(\vec{t})$ dans la base $B_\phi(t)$ en fonction de $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\theta'(t)$ et $\phi'(t)$.
 (b) Donner la matrice $A_\phi(t)$ de a dans la base $B_\phi(t)$.
 (c) Calculer $a(f(\vec{t})) \cdot f(\vec{t})$.
3. (a) Écrire la système différentiel (S) vérifié par θ et ϕ équivalent à (e).
 (b) Prouver que si $\vec{f}_0$ et $\vec{e}_3$ ne sont pas colinéaires, le système (S) équivaut à :

$$\frac{d\phi}{dt} = 2G\lambda \cos^2 \phi + G(1 - \lambda) \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2G\lambda \sin \phi \cos \phi \sin \theta \cos \theta \quad (2)$$

4. Intégrer (S) lorsque $\lambda = 0$ et donner la trajectoire du point m défini par $\overrightarrow{Om(t)} = f(\vec{t})$.
5. On suppose maintenant que λ est non nul.
 (a) Prouver que toute solution φ de (1) est strictement monotone et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
 (b) Montrer que θ reste constant le long d'une courbe intégrale si et seulement si $\sin 2\theta_0 = 0$.
 (c) Lorsque $\sin 2\theta_0 \neq 0$, montrer que (2) s'intègre à l'aide de (1) en :

$$\tan \theta = \frac{C}{\sqrt{\sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi}}$$

où C est une constante.

6. On désigne par $\mathcal{C}_\lambda$ l'ensemble des courbes intégrales de (1) et par ϕ_1 une solution de (1).
 (a) Soit un réel t_1 . Montrer que $\phi_2 : t \mapsto \phi_1(t - t_1)$ est aussi solution de (1). En déduire une propriété géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$.
 (b) Montrer que $\phi_3 : t \mapsto -\phi_1(-t)$ est aussi solution de (1). En déduire une propriété géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$.
 (c) Montrer que $\phi_4 : t \mapsto \frac{\pi}{2} - \phi_1(-t)$ est solution de l'équation (1) associée au paramètre λ .
 Comment déduit-on $\mathcal{C}_{-\lambda}$ de $\mathcal{C}_\lambda$?

7. On définit, pour tout entier relatif k , le réel t_k par $\phi(t_k) = k\pi + \frac{\pi}{2}$

- (a) Pour intégrer (1) sur $]t_k, t_{k+1}[$, effectuer le changement de variables $u = \tan \phi$ et $t = \tau(u)$.
 (b) Montrer que la nouvelle équation obtenue s'intègre en :

$$\tau(u) = \frac{1}{Gr(1 - \lambda)} \arctan \frac{u}{r} + \tau_k$$

où τ_k est une constante que l'on déterminera.

- (c) Retrouver alors sans utiliser la deuxième partie que $\vec{f}$ est une fonction périodique de période $T = \frac{\pi}{G} \left(r + \frac{1}{r} \right) = \frac{2\pi}{\omega}$