

L'objet de ce problème est d'obtenir diverses approximations de la constante d'Euler définie par

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

Il est composé de quatre parties qui sont très largement indépendantes. Il sera tenu compte dans la notation du soin apporté à la rédaction.

Partie I

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$(1) \quad \forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t}{t+n} dt$$

et $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1 \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

1. Expliciter u_n .

Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

2. Expliciter S_n .

En déduire la relation $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \leq u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right),$$

(On pourra dans (1) majorer et minorer le dénominateur).

En déduire un encadrement de $S - S_n$.

4. On veut déterminer une valeur approchée de S en calculant une somme partielle S_n . Déterminer une valeur de n permettant d'obtenir une valeur approchée de S à 10^{-2} près; à 10^{-6} près.

Que pensez-vous de cette méthode d'évaluation ?

Partie II

Dans toute cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 1 fixé.

On définit les fonctions A et B d'une variable réelle par les relations :

$$A(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt, \quad B(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

1. Préciser les domaines de définition de A et B .

Ces fonctions sont-elles continues ? dérivables ? de classe C^∞ ?

2. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1 - (1-u)^n}{u} du = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \int_0^1 \frac{1 - (1-\frac{t}{n})^n}{t} dt - \int_1^n \frac{(1-\frac{t}{n})^n}{t} dt.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $u \in [0, 1]$,

$$(1 - u^2)e^{-u} \leq 1 - u \leq e^{-u}.$$

- (b) Montrer que, pour $\alpha \in [0, 1]$,

$$(1 - \alpha)^n \geq 1 - n\alpha.$$

(c) En déduire que pour tout $t \in [0, n]$,

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

(d) Déduire de ce qui précède que

$$S = A(1) - B(1).$$

Partie III

1. Soit $x > 0$. Calculer $A(x) - B(x) - A(1) - B(1)$.

En déduire que pour tout $x > 0$,

(2)
$$S = A(x) - B(x) - \ln x$$

2. (a) Montrer que pour $x > 0$, $0 \leq B(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

(b) Déterminer $x_0 > 0$ tel que pour $x \geq x_0$ on ait $B(x) \leq \frac{1}{3}10^{-2}$.

3. (a) Montrer que A est développable en série entière :

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

en précisant la valeur de a_n .

(b) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que la suite $(|a_n x^n|)_{n \geq 0}$ est décroissante pour $n \geq x$.

En déduire, pour $n \geq x$, un majorant du reste d'ordre n de la série $\sum a_n x^n$.

4. Indiquer comment utiliser les résultats précédents pour calculer une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Partie IV

On considère les fonctions f et F définies par

$$f : (x, t) \mapsto e^{-t} t^x \quad \text{et} \quad F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt.$$

1. Montrer que F est définie pour $x > -1$.
2. Soient a et b deux réels tels que $-1 < a < b$. On définit la fonction φ par :

$$\forall t > 0, \quad \varphi(t) = \begin{cases} t^a e^{-t} & \text{si } t \in]0, 1[\\ t^b e^{-t} & \text{si } t \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

Montrer que φ est continue sur $]0, +\infty[$ et que, pour $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

En déduire que F est continue sur $] -1, +\infty[$.

3. Montrer de façon analogue que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$.

4. Montrer que $F'(0) = -S$.

(On pourra montrer, par des intégrations par parties bien choisies, que $F'(0) = B(1) - A(1)$.)

5. Soit $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln t dt$.

Montrer que cette intégrale existe pour $x > 0$.

Exprimer sa valeur à l'aide de x et de la constante S .