

SESSION 2026

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE**

PROBLÈME DE PHYSIQUE

Durée : 6 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier. Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1500A	103	0889

Marée thermique atmosphérique

La rotation de la Terre sur elle-même ne cesse de ralentir. Ce phénomène est principalement dû aux marées océaniques soulevées par la Lune et le Soleil. Récemment, une nouvelle question a émergé parmi les chercheurs étudiant l'évolution de la Terre : les marées thermiques atmosphériques, découvertes par William Thomson en 1882, ont-elles pu stopper, voire inverser, ce ralentissement de la rotation de la Terre durant le précambrien (il y a entre 1 et 2 milliards d'années)? Nous nous proposons ici d'apporter des éléments de réponse à cette interrogation.

Les marées thermiques atmosphériques se manifestent par des oscillations périodiques diurnes (période de 24 h) et semi-diurnes (période de 12 h) de la pression atmosphérique. Ce problème reprend différents aspects de cette marée dans un cadre simplifié où l'on ne tient pas compte de l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre. **Selon cette hypothèse, le soleil se situe à chaque instant dans le plan équatorial de la Terre.**

Le problème comporte quatre parties largement indépendantes. La première traite des aspects thermodynamiques de l'atmosphère. La seconde partie est centrée sur la décomposition en série de Fourier de la déformation de l'atmosphère. Le couple de marée induit par cette déformation est calculé dans la troisième partie. La réponse de l'atmosphère modélisée par une fonction de transfert est étudiée dans la quatrième et dernière partie.

Données

quantité	symbole	valeur	unité
Constante gravitationnelle	\mathcal{G}	$6,674 \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Unité astronomique	1 au	$1,496 \times 10^{11}$	m
Masse du soleil	m_S	$1,988 \times 10^{30}$	kg
Masse de la Terre	m_T	$5,972 \times 10^{24}$	kg
Rayon de la Terre	R_T	6371	km
Accélération de la pesanteur	g	9,81	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante solaire	F_S	1361	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	R	8,314	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Indice adiabatique de l'air	γ	1,4	
Masse molaire de l'air	\mathcal{M}_{air}	29	$\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Enthalpie massique de vaporisation de l'eau	Δh_v	2265×10^3	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$

I Stratification de la troposphère

Dans cette partie, nous ne nous intéresserons qu'à la troposphère, la partie la plus dense et la plus massive de l'atmosphère d'une dizaine de kilomètres d'épaisseur. On note $\rho_0(z)$, $P_0(z)$ et $T_0(z)$, la masse volumique, la pression et la température moyenne de l'atmosphère à une altitude z , respectivement. Le gaz constituant l'atmosphère est assimilé à **un gaz parfait** de masse molaire \mathcal{M}_{air} et d'indice adiabatique $\gamma = c_p/c_v$ où c_p et c_v sont les capacités thermiques massiques à pression constante et à volume constant, respectivement.

- 1) Justifier à partir de la composition de l'atmosphère que la masse molaire de l'air vaut $\mathcal{M}_{\text{air}} \approx 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- 2) Exprimer l'équation d'état de l'air en fonction de ρ_0, P_0, T_0 . On introduira la constante $\mathcal{R}_{\text{air}} = R/M_{\text{air}}$ qui est le rapport de la constante des gaz parfaits R par la masse molaire M_{air} . On précisera la valeur numérique de \mathcal{R}_{air} .
- 3) Justifier que l'indice adiabatique de l'air à température ambiante vaut $\gamma = 1,4$. Dans la suite, nous supposons cette valeur indépendante de la température.

Considérons un volume d'air de taille mésoscopique constituant un système fermé, que l'on appellera *parcelle d'air*, déplacé de sa position initiale d'une hauteur $dz > 0$ comme indiqué sur le schéma (figure 1). La force ressentie par cette parcelle d'air permet alors de qualifier l'état de stratification de l'atmosphère.

Atmosphère stablement stratifiée. La parcelle d'air subit une force qui tend spontanément à la ramener vers sa position initiale.

Atmosphère à stratification neutre. La parcelle d'air s'ajuste de sorte que la force qu'elle subit soit nulle.

En particulier, la troposphère est à stratification neutre.

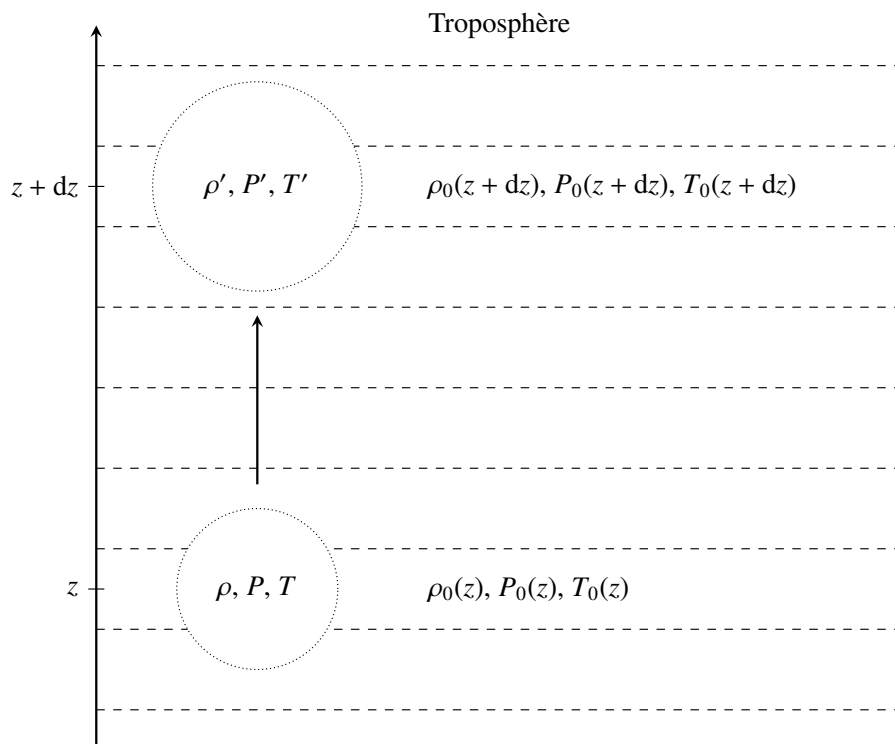


FIGURE 1 – Déplacement d'une parcelle d'air dans la troposphère.

On note $\rho = \rho_0(z), P = P_0(z)$ et $T = T_0(z)$, les grandeurs thermodynamiques dans la parcelle à l'altitude z et $\rho' = \rho + d\rho, P' = P + dP, T' = T + dT$, les mêmes quantités lorsque la parcelle se situe en $z + dz$. Pour les quantités extérieures, on pose $\rho_0(z + dz) = \rho_0 + d\rho_0, P_0(z + dz) = P_0 + dP_0$ et $T_0(z + dz) = T_0 + dT_0$.

- 4) À quelle condition, exprimée en fonction de $d\rho$ et $d\rho_0$, l'atmosphère est-elle stablement stratifiée? Justifier.

On suppose le déplacement suffisamment rapide pour que la transformation du gaz contenu dans la parcelle soit adiabatique, mais aussi suffisamment lente pour que la pression à l'intérieur de la parcelle ait le temps de s'équilibrer avec la pression ambiante. Nous supposons également la transformation réversible.

- 5) Dans le cas de cette transformation, exprimer ρ' en fonction de ρ, P, P' et γ .
- 6) En déduire, à l'aide d'un développement limité, une expression de $d\rho$ en fonction de ρ_0, P_0, dP_0 et γ .
- 7) À partir de l'équation d'état de l'air, établir la relation suivante

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} = \frac{dP_0}{P_0} - \frac{dT_0}{T_0}. \quad (1)$$

- 8) En déduire que la condition obtenue à la question 4 pour une atmosphère stablement stratifiée peut s'écrire

$$\left[\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{T_0}{P_0} \frac{dP_0}{dz} + \frac{dT_0}{dz} \right] dz > 0. \quad (2)$$

- 9) Sachant que dans la troposphère les gradients de pression et de température sont tous les deux négatifs, justifier que cette couche de l'atmosphère est stablement stratifiée tant que la valeur absolue du gradient de température, $|dT_0/dz|$, est inférieur à une limite que l'on exprimera en fonction de la valeur absolue du gradient de pression $|dP_0/dz|$ et des autres données du problème.
- 10) Une atmosphère isotherme est-elle stablement stratifiée ? Justifier.

I.1 Atmosphère à stratification neutre

Dorénavant, nous admettrons que l'atmosphère est à stratification neutre. Dans ce cas, $d\rho = d\rho_0$ et l'inégalité de la question 8 devient une égalité.

- 11) Montrer que le gradient de température est relié au gradient de pression par la relation

$$\frac{dT_0}{T_0} = \kappa \frac{dP_0}{P_0}. \quad (3)$$

Donner l'expression de κ et vérifier numériquement que $\kappa \approx 0,29$.

- 12) Exprimer la variation de pression dP_0 en fonction de la variation d'altitude dz . On notera g l'accélération de la pesanteur supposée uniforme sur toute la hauteur de l'atmosphère.
- 13) Déterminer le gradient de température au sol, que l'on notera $\mu_{\text{sec}} = (dT_0/dz)_{z=0}$, en fonction de κ, g et \mathcal{R}_{air} . Faire l'application numérique.
- 14) Comparer la valeur obtenue à la pente de la température au niveau de la troposphère telle que prescrite par l'organisation internationale de standardisation dans la figure 2.

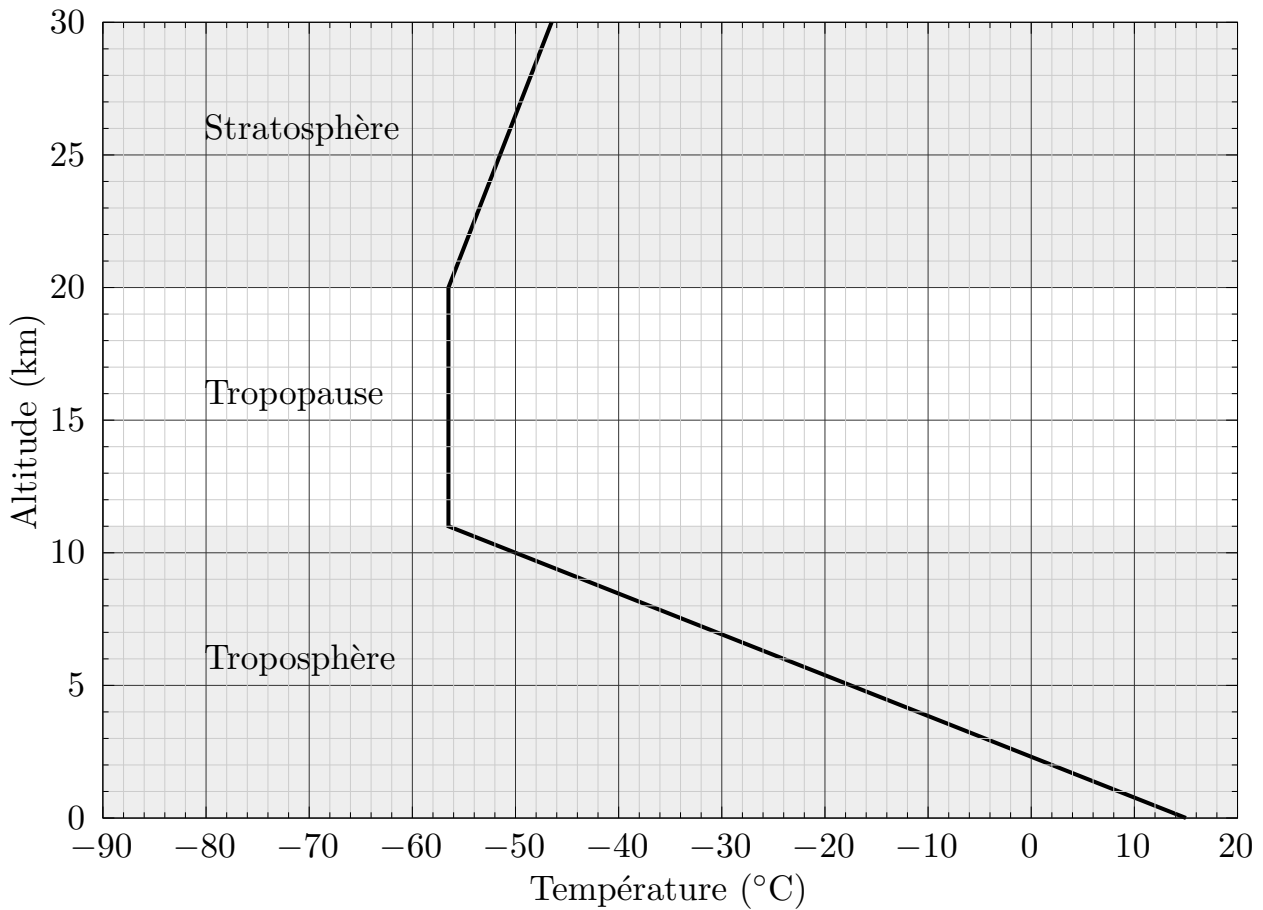


FIGURE 2 – Profil de température de l’atmosphère standard, telle que définie par l’*International Organization of Standardization* en 1975, tracé jusqu’à une altitude de 30 km.

I.2 Air humide

Supposons que la parcelle d’air considérée à la figure 1 contienne maintenant une certaine quantité d’eau sous forme liquide et sous forme vapeur. Intéressons-nous ici à l’évolution de cette humidité lorsque la parcelle s’élève.

- 15) Étant donné le sens de variation de la température lorsque la parcelle s’élève, indiquer le changement d’état de l’eau dans cette parcelle.
- 16) Cette transformation est-elle endothermique ou exothermique? En déduire l’effet qualitatif de la présence d’humidité dans la parcelle sur le gradient de température au sol.
- 17) Dans le diagramme de phase de l’eau de la figure 3, identifier les différentes phases de l’eau (ETAT 1, ETAT 2 et ETAT 3) et les deux points remarquables A et B. Rappeler le nom des transformations entre chacune de ces trois phases.

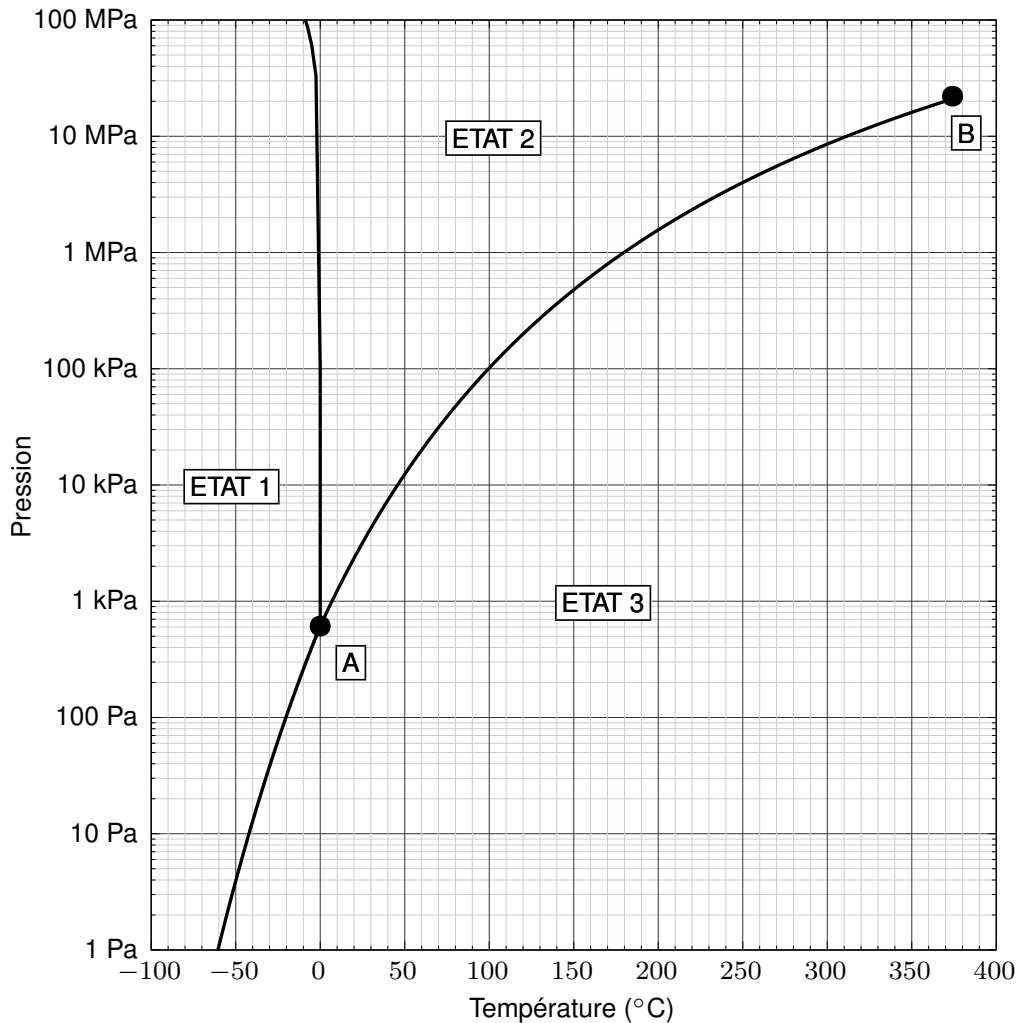


FIGURE 3 – Diagramme de phase de l'eau.

- 18) Dans ce même diagramme, indiquer la courbe de pression de vapeur saturante de l'eau. Par lecture graphique, donner sa valeur à la température de 15 °C.

Dans la suite, pour la pression de vapeur saturante $P_{\text{sat}}(T)$, on utilisera la formule de Clausius-Clapeyron

$$P_{\text{sat}}(T) = P_{\text{sat}}(T_{\text{ref}}) \exp \left[A \left(1 - \frac{T_{\text{ref}}}{T} \right) \right], \quad (4)$$

où $A \approx 17$ est une constante et T_{ref} , une température de référence où la pression de vapeur saturante $P_{\text{sat}}(T_{\text{ref}})$ est connue.

I.3 Gradient adiabatique humide

On considère ici une parcelle d'air de masse m saturée en vapeur d'eau. On définit le rapport de mélange saturant r_{sat} comme le rapport de la masse de vapeur m_{vap} à saturation sur la masse d'air sec m_{sec} de la parcelle que nous assimilerons à la masse totale de la parcelle ($m_{\text{sec}} \approx m$).

- 19) Montrer que le rapport de mélange saturant est donné par la formule

$$r_{\text{sat}} = \frac{\mathcal{M}_{\text{H}_2\text{O}} P_{\text{sat}}}{\mathcal{M}_{\text{air}} P}, \quad (5)$$

et justifier que le rapport des masses molaires vaut $\mathcal{M}_{\text{H}_2\text{O}}/\mathcal{M}_{\text{air}} \approx 0,62$.

- 20) En déduire la valeur de r_{sat} à la température de surface moyenne de la Terre $T_s = 15^\circ\text{C}$. Justifier l'approximation $m_{\text{sec}} \approx m$.

Nous allons maintenant chercher à déterminer le gradient de température au sol $(dT_0/dz)_{z=0}$ pour un air saturé en vapeur d'eau. Supposons pour cela qu'une parcelle d'air saturé de masse m se déplace de façon adiabatique réversible d'une altitude z à une altitude $z + dz$.

- 21) En exprimant la variation d'enthalpie massique dh de deux façons, montrer que

$$c_p dT + \Delta h_v dr_{\text{sat}} + g dz = 0, \quad (6)$$

avec c_p , la capacité thermique massique à pression constante. On se placera dans le cas où la température T et la pression P de la parcelle restent en équilibre avec la température T_0 et la pression P_0 de l'atmosphère lorsqu'elle s'élève de la quantité dz .

- 22) Montrer que le gradient de température au sol $\mu_{\text{sat}} = (dT_0/dz)_{z=0}$ pour un air saturé est donné par l'expression

$$\mu_{\text{sat}} = -\frac{g}{c_p} \frac{1 - \rho_0 \Delta h_v \left(\frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial P} \right)_T}{1 + \frac{\Delta h_v}{c_p} \left(\frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial T} \right)_P}. \quad (7)$$

- 23) Montrer que $\mu_{\text{sat}} = \mu_{\text{sec}}$ lorsque le rapport de mélange saturant r_{sat} est constant. Le justifier physiquement.
- 24) Exprimer μ_{sat} en fonction de $\mu_{\text{sec}}, r_{\text{sat}}, T_0, T_{\text{ref}}, A, \Delta h_v, \mathcal{R}_{\text{air}}$ et c_p .
- 25) La prise en compte de l'humidité telle que décrite par l'équation (7) revient à remplacer la constante κ introduite dans l'équation (3) par une constante effective $\kappa_{\text{sat}} = 0,16$. En déduire la valeur numérique de μ_{sat} . Entre les modèles d'air sec et d'air saturé, lequel se rapproche le plus du profil de température observé d'après l'Organisation Internationale de Standardisation ?

II Déformation de l'atmosphère

Dans cette partie, nous étudions la redistribution de masse au sein de l'atmosphère induite par le chauffage du soleil.

II.1 Décomposition du flux solaire reçu en chaque point de la Terre

Soit un point M à la surface de la Terre au niveau de l'équateur (pour rappel, on suppose dans ce problème que le soleil se situe également dans le plan équatorial de la Terre). On note O le centre de la Terre, S la position du soleil et $\alpha = \widehat{SOM}$ l'angle orienté entre la direction du soleil et celle du point M vues depuis le centre de la Terre (cf figure 4). L'angle α sera compté positivement dans le sens trigonométrique.

On note F_s la constante solaire, c'est-à-dire le flux énergétique stellaire incident reçu par unité de surface exposée perpendiculairement à la direction du soleil.

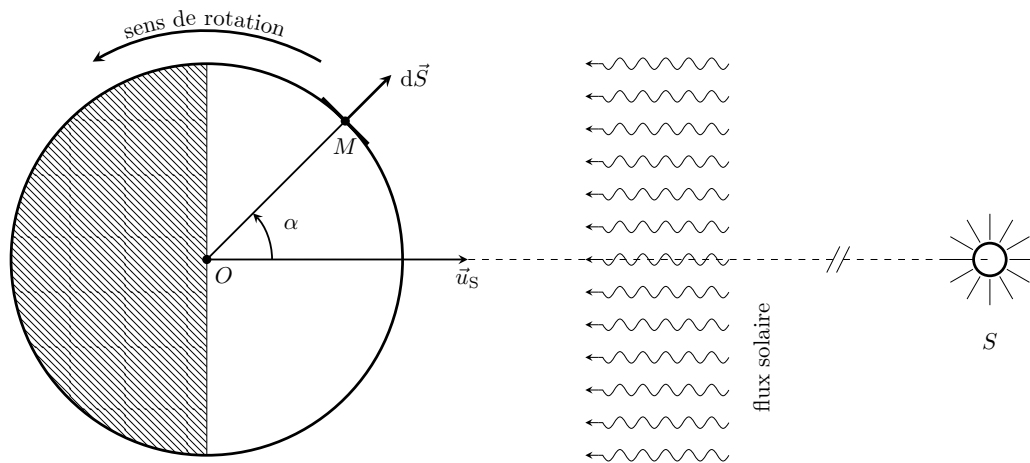


FIGURE 4 – Le flux énergétique provient du soleil S situé à très grande distance dans la direction \vec{u}_S . Une surface $d\vec{S}$ en un point M de l'équateur reçoit ce flux sous un angle d'incidence $\alpha = \widehat{SOM}$. Seuls les points de la surface éclairée reçoivent ce flux.

26) Déterminer l'expression du flux solaire reçu $F(\alpha)$ défini comme la puissance lumineuse reçu au point M par unité de surface terrestre. On exprimera le résultat en fonction de la constante solaire F_S et de l'angle α . On distinguera le cas où M se situe sur la face éclairée de la Terre de celui où M est dans l'ombre.

27) Tracer l'allure du flux $F(\alpha)$ en fonction de l'angle α variant de $-\pi$ à π .

Dans la suite, ce flux $F(\alpha)$ est décomposé en série de Fourier de la forme

$$F(\alpha) = \hat{F}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n \cos(n\alpha) \quad (8)$$

avec

$$\hat{F}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha) d\alpha \quad \text{et} \quad \hat{F}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

28) Justifier l'absence de termes en $\sin(n\alpha)$ dans le développement en série de Fourier du flux $F(\alpha)$.

29) Montrer que, dans le problème étudié ici, l'amplitude \hat{F}_n associée à une harmonique de rang $n \geq 1$ peut s'écrire sous la forme d'une intégrale entre 0 et $\pi/2$.

30) Calculer \hat{F}_1 .

31) Donner l'expression de \hat{F}_n pour $n \geq 2$. En déduire que pour tout $p \geq 1$,

$$\hat{F}_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{F}_{2p} = \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2 - 1)} \frac{2}{\pi} F_S. \quad (9)$$

32) Justifier que les harmoniques de rang $n \geq 3$ sont petites devant le terme fondamental $n = 1$. On pourra les négliger en première approximation.

33) Évaluer numériquement le rapport de l'excitation semi-diurne (\hat{F}_2) sur l'excitation diurne (\hat{F}_1), c'est-à-dire le rapport \hat{F}_2/\hat{F}_1 .

Ces excitations diurne et semi-diurne du flux solaire engendrent des variations journalières de pression au niveau de l'équateur. La figure 5 représente cette variation de pression, ainsi que les deux premières harmoniques associées, en fonction de l'angle de phase α . Sur cette figure, le temps solaire local associé à l'angle de phase est également indiqué. En particulier, en tout point M de l'équateur, il est midi solaire (12 h) lorsque l'angle de phase est nul.

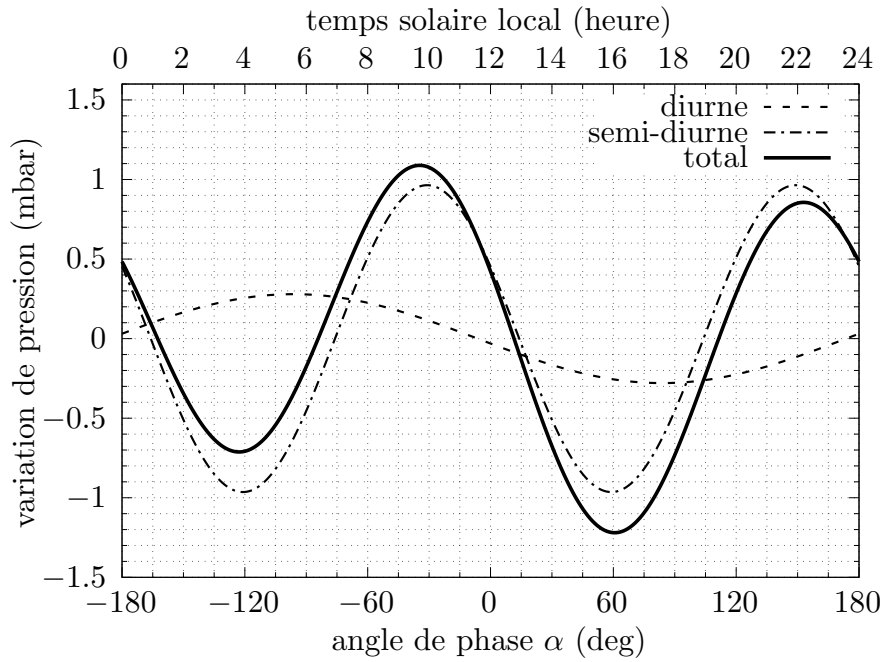


FIGURE 5 – Variation journalière de pression en mbar au niveau de l'équateur. Il s'agit d'une donnée moyennée sur une année tracée en fonction de l'angle de phase. La valeur moyenne de la pression a été soustraite afin de ne garder que la partie variable à l'endroit où les mesures ont été prises. Le signal est décomposé en une composante diurne $\delta P_1 = \hat{P}_1 \cos(\alpha - \alpha_1)$ et une composante semi-diurne $\delta P_2 = \hat{P}_2 \cos(2(\alpha - \alpha_2))$ (Adaptée de la figure 13 de l'article (Auclair-Desrotour, Laskar et Mathis, 2017, A&A 603, A107)).

- 34) Sous l'effet du flux solaire, l'atmosphère se comporte comme un oscillateur forcé caractérisé par une fréquence propre. À partir de la figure 5 et du résultat de la question précédente, justifier que la période propre est plus proche de la période semi-diurne (12 h) que de la période diurne (24 h).

II.2 Redistribution de masse

- 35) En chaque point du sol, on note $\Sigma(t)$ la masse d'atmosphère à l'instant t intégrée verticalement dans un cylindre de section unitaire d'une altitude $z = 0$ à une altitude $z \rightarrow \infty$:

$$\Sigma(t) = \int_0^\infty \rho(z, t) dz, \quad (10)$$

où $\rho(z, t)$ est la valeur de la densité de l'atmosphère à l'altitude z à l'instant t . Exprimer $\Sigma(t)$, en fonction de la pression de surface $P_s(t)$.

- 36) On pose $\Sigma(\alpha) = \hat{\Sigma}_0 + \hat{\Sigma}_1 \cos(\alpha - \alpha_1) + \hat{\Sigma}_2 \cos(2(\alpha - \alpha_2))$. À l'aide de la figure 5, évaluer numériquement les amplitudes de marée $\hat{\Sigma}_1$ et $\hat{\Sigma}_2$ ainsi que les déphasages α_1 et α_2 correspondants.
- 37) Faire un schéma représentant le soleil, la Terre et la composante semi-diurne de l'excès de masse surfacique $\hat{\Sigma}_2 \cos(2(\alpha - \alpha_2))$ à l'équateur à un instant donné sur le modèle de la figure 6. Étant donné le sens de rotation de la Terre, en déduire si le couple de marée tend à accélérer ou à décélérer la rotation de la Terre.
- 38) Vérifier que $\hat{\Sigma}_2 \approx 3,3\hat{\Sigma}_1 \ll m_T/R_T^2$.

III Couple de marée

Nous nous intéressons ici aux effets de la distribution de masse non isotrope de l'atmosphère terrestre. On considère de façon générique une planète de masse m_T possédant une distribution de masse axisymétrique. Nous définissons le repère $(G, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$, centré sur le barycentre G de la planète et orienté de sorte que l'axe \vec{u}_X soit l'axe de symétrie de la distribution de masse. Dans notre problème, \vec{u}_X se situe dans le plan équatorial de la planète et l'axe de rotation est porté par \vec{u}_Z .

La planète est en interaction gravitationnelle avec le soleil S de masse m_S considéré ponctuel. On note $\vec{r}_S = \vec{GS}$ le vecteur position de cette étoile. Pour rappel, dans ce problème nous faisons l'hypothèse simplificatrice que **le soleil se situe dans le plan équatorial de la planète** ($\vec{r}_S \perp \vec{u}_Z$). L'angle de phase du renflement, c'est-à-dire l'angle entre les vecteurs \vec{u}_X et \vec{r}_S (voir la figure 6) est noté β .

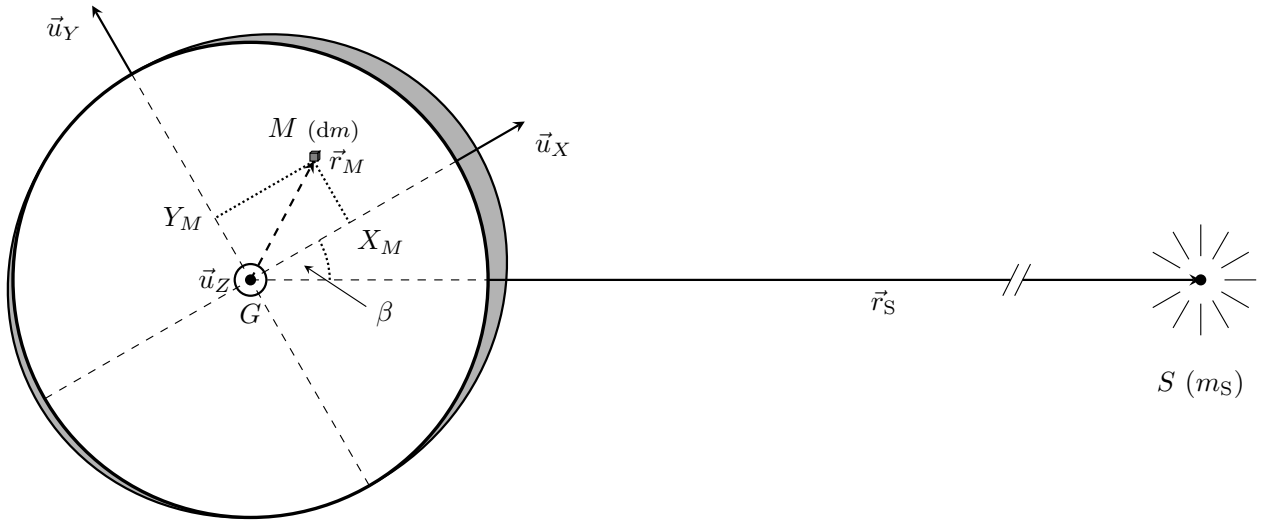


FIGURE 6 – Définition du repère $(G, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$. Est également représenté dans la figure un élément de masse dm situé au point M à l'intérieur de la planète.

Les coordonnées d'un point M dans le repère $(G, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$ sont notées $\vec{GM} = (X_M, Y_M, Z_M)$. Celles de l'étoile sont notées $\vec{r}_S = (X_S, Y_S, Z_S = 0)$.

III.1 Développement multipolaire

- 39) Donner l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle dU entre un élément de masse dm de la planète située en M de vecteur position \vec{r}_M et le soleil S situé en \vec{r}_S . En déduire l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle totale U d'interaction entre la planète et le soleil sous la forme d'une intégrale sur toute la masse de la planète.
- 40) À partir d'un développement limité à l'ordre 2 en r_M/r_S , montrer que cette énergie potentielle peut s'écrire $U \approx U_0 + U_1 + U_2$ avec,

$$\begin{aligned}
 U_0 &= -\frac{\mathcal{G}m_S}{r_S} \int_{m_T} dm, & U_1 &= -\frac{\mathcal{G}m_S}{r_S} \int_{m_T} \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{r}_S}{r_S^2} dm, \\
 U_2 &= -\frac{\mathcal{G}m_S}{r_S} \int_{m_T} \frac{1}{2} \left(3 \left(\frac{\vec{r}_M \cdot \vec{r}_S}{r_S^2} \right)^2 - \frac{r_M^2}{r_S^2} \right) dm.
 \end{aligned} \tag{11}$$

- 41) Calculer les termes monopolaire et dipolaire U_0 et U_1 . Interpréter les résultats obtenus.

Pour la planète axisymétrique, le terme quadrupolaire U_2 est donné par la formule de MacCullagh

$$U_2 = \frac{\mathcal{G}m_S(I_{\parallel} - I_{\perp})}{2r_S^3} (3 \cos^2(\beta) - 1). \quad (12)$$

Dans cette expression, I_{\parallel} est le moment d'inertie par rapport à l'axe \vec{u}_X défini par

$$I_{\parallel} = \int (Y_M^2 + Z_M^2) dm = 2 \int Y_M^2 dm = 2 \int Z_M^2 dm, \quad (13)$$

et I_{\perp} , le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque perpendiculaire à l'axe \vec{u}_X , défini par

$$I_{\perp} = \int (X_M^2 + Y_M^2) dm = \int (X_M^2 + Z_M^2) dm. \quad (14)$$

- 42) Justifier que pour une distribution sphérique de masse le moment quadrupolaire U_2 est nul.
- 43) L'étoile exerce un couple de marée Γ_{atm} sur la planète selon le vecteur \vec{u}_Z . Calculer le travail infinitésimal fourni par ce couple à la planète lorsque cette dernière pivote autour de l'axe \vec{u}_Z d'un angle $d\beta$.
- 44) Relier ce travail à la variation d'énergie potentielle gravitationnelle dU . En déduire l'expression du couple dans le cas où l'énergie potentielle gravitationnelle est réduite à son terme quadrupolaire, c'est-à-dire, dans le cas où $U = U_2$.

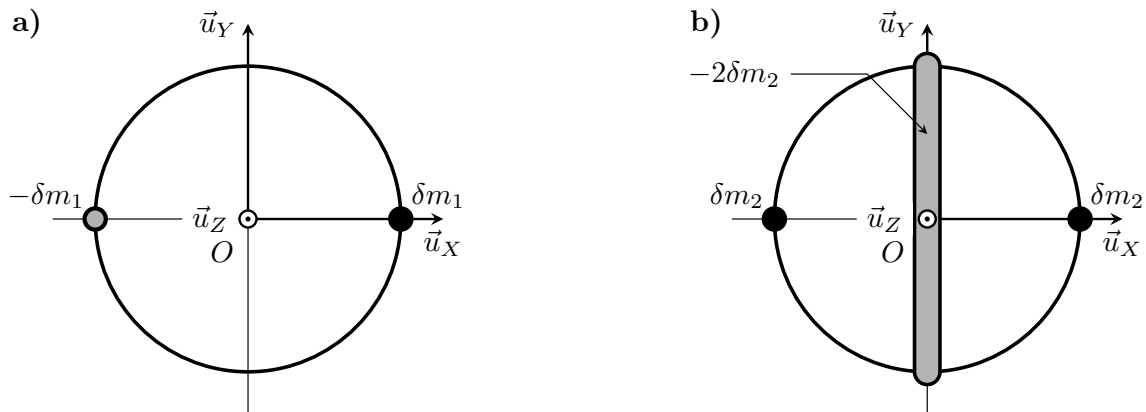


FIGURE 7 – a) Distribution de masse pour le modèle dipolaire. b) Distribution de masse pour le modèle quadrupolaire. Les excès de masse sont représentés en noir et les défauts de masse en gris.

III.2 Terme dipolaire

Pour modéliser la redistribution de masse diurne de la section II, on considère une planète \mathcal{P}_1 sphérique, de masse m_T , de rayon R_T , de **centre géométrique** O , et possédant deux anomalies de masse opposées $+\delta m_1$ en $(R_T, 0, 0)$ et $-\delta m_1$ en $(-R_T, 0, 0)$ comme représenté dans la figure 7a. Cette modélisation est équivalente à une distribution dipolaire continue si l'on pose

$$\delta m_1 = \frac{2\pi}{3} \hat{\Sigma}_1 R_T^2, \quad (15)$$

où $\hat{\Sigma}_1$ est le coefficient de Fourier de la distribution de masse surfacique tel que défini à la question 36.

45) Calculer la position du barycentre G de cette planète dans le repère $(O, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$.

On rappelle le théorème de Huygens permettant de calculer le moment d'inertie $I_{\Delta'}$ d'un corps de masse m_T par rapport à un axe Δ' connaissant son moment d'inertie I_{Δ} par rapport à un axe Δ parallèle à Δ' et passant par le barycentre du corps :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + m_T d^2, \quad (16)$$

où d est la distance du barycentre G à l'axe Δ' , comme représenté dans la figure 8.

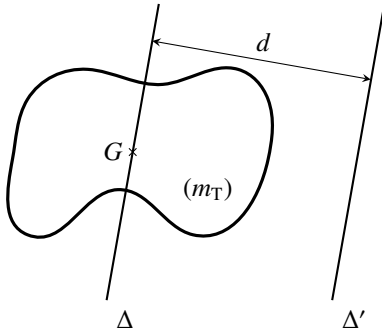


FIGURE 8 – Géométrie associée au théorème de Huygens.

46) On note I_{\parallel} le moment d'inertie de la planète \mathcal{P}_1 par rapport à l'axe \vec{u}_X et I'_{\perp} le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal à \vec{u}_X passant par O . On posera I_0 le moment d'inertie de la planète \mathcal{P}_1 en l'absence d'anomalie de masse ($\delta m_1 = 0$).

- Calculer le moment d'inertie I_{\parallel} .
- Calculer le moment d'inertie I'_{\perp} .
- Calculer le moment d'inertie I_{\perp} par rapport à un axe orthogonal à \vec{u}_X mais passant le barycentre G de la planète \mathcal{P}_1 .

III.3 Terme quadrupolaire

Pour modéliser la redistribution semi-diurne de la section II, on considère cette fois-ci une planète \mathcal{P}_2 sphérique, de masse m_T , de rayon R_T , de centre géométrique O , mais possédant à sa surface trois anomalies de masse : deux anomalies positives $+\delta m_2$ en $(R_T, 0, 0)$ et $(-R_T, 0, 0)$ et un anneau homogène de masse négative $-2\delta m_2$ de rayon R_T dans le plan $(O, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$, comme représenté dans la figure 7b. Cette modélisation est équivalente à une distribution quadrupolaire continue si l'on pose

$$\delta m_2 = \frac{16\pi}{45} \hat{\Sigma}_2 R_T^2, \quad (17)$$

où $\hat{\Sigma}_2$ est le coefficient de Fourier de la distribution de masse surfacique tel que défini à la question 36.

47) Calculer la position du barycentre de la planète \mathcal{P}_2 dans le repère $(O, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$.

48) On note I_{\parallel} le moment d'inertie de la planète \mathcal{P}_2 par rapport à l'axe \vec{u}_X et I_{\perp} le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal à \vec{u}_X passant par G . On posera I_0 le moment d'inertie de la planète \mathcal{P}_2 en l'absence d'anomalies de masse ($\delta m_2 = 0$).

- Calculer le moment d'inertie I_{\parallel} . Commenter le résultat.
- Montrer que le moment d'inertie d'un cercle de masse δm et de rayon R par rapport à un de ses diamètres vaut $\frac{1}{2}\delta m R^2$.
- Calculer le moment d'inertie I_{\perp} .

III.4 Amplitude du couple de marée actuel

En raison des marées thermiques atmosphériques, la Terre possède à la fois une densité surfacique de masse dipolaire et quadrupolaire.

- 49) En vous aidant des questions 38, 46 et 48, justifier que la redistribution de masse dipolaire a un effet négligeable devant la redistribution de masse quadrupolaire sur le potentiel gravitationnel U_2 (équation (12)) de la planète. Dans la suite, on ne considérera que la redistribution de masse quadrupolaire et on prendra $\beta = \alpha_2$ où α_2 est défini à la question 36.
- 50) En déduire le potentiel gravitationnel de la planète \mathcal{P}_2 à l'ordre quadrupolaire, puis le couple de marée.
- 51) Évaluer numériquement et discuter le signe du couple de marée thermique atmosphérique en vous appuyant sur le résultat de la question 36. Comparer la valeur obtenue à celle du couple de marée océanique actuel $\Gamma_{\text{océan}} = -4,5 \times 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 52) Au Précambrien, le couple de marée océanique était réduit d'un facteur 4 et le couple de marée thermique atmosphérique a pu être amplifié par une résonance. Estimer l'amplification résonante nécessaire pour que les deux couples s'annulent mutuellement.

Dans la prochaine partie, nous évaluerons l'amplitude maximale du couple de marée pour savoir si un tel blocage a pu avoir lieu.

IV Évolution de l'amplitude du couple de marée

Comme nous venons de le voir, seule la composante quadrupolaire a un effet sur le couple de marée thermique atmosphérique. C'est donc ce terme que nous allons étudier ici. En un point M de longitude ϕ sur l'équateur, la composante semi-diurne du flux solaire à un instant t (en heure UTC +12:00 h) s'écrit

$$\delta F(t, \phi) = \text{Re} \left(\delta F_2 e^{i(\omega t + 2\phi)} \right), \quad (18)$$

où δF_2 est une amplitude réelle associée à la fréquence de marée semi-diurne.

Il est rappelé qu'actuellement ω vaut $\omega_0 = 2\pi/12 \text{ h}$.

Nous admettrons qu'il existe une fonction de transfert $\underline{\mathcal{T}}(\omega)$ telle que l'amplitude complexe de la variation semi-diurne de pression

$$\delta P(t, \phi) = \text{Re} \left(\underline{\delta P}_2(\omega) e^{i(\omega t + 2\phi)} \right) \quad (19)$$

va

$$\underline{\delta P}_2(\omega) = \underline{\mathcal{T}}(\omega) \delta F_2. \quad (20)$$

On notera $A(\omega)$ le module de la fonction de transfert et $\psi(\omega)$ son argument, de sorte que

$$\underline{\mathcal{T}}(\omega) = A(\omega) e^{i\psi(\omega)}. \quad (21)$$

Enfin, le couple de marée atmosphérique $\Gamma_{\text{atm}}(\omega)$ est proportionnel à la partie imaginaire de l'amplitude de la variation de pression

$$\Gamma_{\text{atm}}(\omega) = C \text{Im} \left(\underline{\delta P}_2(\omega) \right), \quad (22)$$

où C est une constante réelle positive.

53) Question préliminaire : détermination de la valeur numérique ψ_0 de la phase ψ à la fréquence de marée actuelle ω_0 .

- a) Lorsque l'insolation δF est maximale à $t = 0$ au niveau du méridien de Greenwich ($\phi = 0$), d'après l'expression de $\delta P(t, \phi)$, à quelle longitude ϕ_0 (modulo 180 deg) le maximum de pression est-il atteint? On donnera la réponse en fonction de la phase $\psi(\omega)$.
- b) Cette longitude ϕ_0 correspond à la phase α_2 de la partie II. En déduire la valeur numérique ψ_0 de ψ à la fréquence de marée actuelle ω_0 .

La fonction de transfert $\underline{\mathcal{T}}(\omega)$, déduite des équations primitives, traduit la réponse de l'atmosphère au forçage radiatif du soleil. En bonne approximation, son expression est

$$\underline{\mathcal{T}}(\omega) = \underline{\mathcal{T}}_1(\omega) + \underline{\mathcal{T}}_2(\omega), \quad (23)$$

avec

$$\underline{\mathcal{T}}_1(\omega) = -\frac{A_0}{\varepsilon + i\omega/\omega_L} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{T}}_2(\omega) = \frac{A_0}{\varepsilon\kappa + i\left(\frac{\omega}{\omega_L} - \frac{\omega_L}{\omega}\right)}.$$

Dans la formule du couple (équation (23)),

- A_0 est une constante réelle qui dépend des propriétés physiques de l'atmosphère ;
- ω_L est la pulsation propre d'oscillation de l'atmosphère. Nous la prendrons égale à $1,51 \times 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- ε est un terme de dissipation mal contraint par la théorie. Nous le supposons petit devant 1 ;
- κ est la constante introduite dans la première partie. Nous utiliserons la valeur correspondant à une atmosphère saturée en eau : $\kappa = 0,16$.

Nous introduirons également le paramètre $\omega_R = \varepsilon\omega_L \ll \omega_L$ tel que $1/\omega_R$ soit le temps caractéristique de refroidissement radiatif. Ce phénomène physique joue le rôle d'un frottement visqueux pour l'atmosphère.

- 54) À quels types de filtre correspondent les deux termes de l'équation (23)? On précisera leurs principales caractéristiques.
- 55) Représenter les diagrammes de Bode en amplitude et en phase de ces deux filtres en indiquant les points et caractéristiques remarquables de ce diagramme.
- 56) Donner l'expression de la partie imaginaire de $\underline{\mathcal{T}}(\omega)$.
- 57) Calculer les valeurs extrémales de la partie imaginaire de chacun des termes de l'équation (23) et les pulsations ω correspondantes. Pour $\text{Im}(\underline{\mathcal{T}}_2(\omega))$, on cherchera les valeurs extrémales à des pulsations proches de ω_L dont les expressions seront données au premier ordre en $\varepsilon\kappa$.
- 58) Tracer l'allure du graphe du couple en fonction de la pulsation ω pour $\omega \geq 0$.
- 59) Donner la valeur numérique de $X_0 = \omega_0/\omega_L$ calculée avec la vitesse de rotation de la Terre actuelle.
- 60) Justifier que $\underline{\mathcal{T}}_1(\omega)$ est négligeable devant $\underline{\mathcal{T}}_2(\omega)$ dans l'équation (23) lorsque l'on étudie le couple de marée thermique atmosphérique au voisinage de la pulsation de marée actuelle.

Dorénavant, nous négligerons l'effet du premier filtre $\underline{\mathcal{T}}_1(\omega)$ et supposons que la réponse de l'atmosphère est intégralement décrite par le terme $\underline{\mathcal{T}}_2(\omega)$ de l'équation (23).

- 61) Que peut-on dire du couple de marée lorsque $\omega = \omega_L$?
- 62) Évaluation du terme de dissipation.
- Donner l'expression de la phase actuelle ψ_0 de la fonction de transfert en fonction de X_0 et des données du problème.
 - En déduire l'expression de ε . Faire l'application numérique.
- 63) En supposant que les marées océaniques (non traitées dans ce problème) produisent un couple $\Gamma_{\text{océan}} < 0$ dont la valeur absolue est inférieure à la valeur maximale de Γ_{atm} , indiquer sur le graphe du couple le ou les points d'équilibre stable.
- 64) Sur cette même courbe, où se situe le point correspondant à la valeur actuelle de la rotation de la Terre ?
- 65) Calculer le facteur d'amplification du couple de marée thermique atmosphérique $\eta = \Gamma_{\text{atm}}^{\text{max}} / \Gamma_{\text{atm}}^0$ entre la valeur actuelle Γ_{atm}^0 et la valeur maximale $\Gamma_{\text{atm}}^{\text{max}}$ en fonction de X_0 , ε et κ . Faire l'application numérique.
- 66) Étant donné le résultat obtenu à la question 52, conclure sur la possibilité d'un blocage de la vitesse de rotation de la Terre durant le Précambrien : $\Gamma_{\text{atm}} + \Gamma_{\text{océan}} = 0$.

FIN DE L'ÉPREUVE

