Agrégation interne de Mathématiques

(et CAERPA)

Session 2002

Deuxième épreuve écrite

Introduction

On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur tout segment de $\mathbf{R}$. Pour x et $y \in \mathbf{R}$, on pose $\mathrm{F}(x,y) = \int_x^y f(t)\ dt$.

On rappelle que, si la fonction f est réelle et positive, elle est intégrable sur $\mathbf{R}$ si la fonction F est bornée. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est alors égale à la borne supérieure de l'ensemble des nombres $\mathrm{F}(x,y)$, pour x et y parcourant $\mathbf{R}$. C'est aussi la limite de $\mathrm{F}(x,y)$ lorsque $x \to -\infty$ et $y \to \infty$.

Si la fonction f est à valeurs réelles ou complexes, elle est intégrable sur $\mathbf{R}$ si la fonction $|f|$ est intégrable. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est aussi égale à la limite de $\mathrm{F}(x,y)$ lorsque $x \to -\infty$ et $y \to \infty$.

Si E est une partie de $\mathbf{R}^n$, on appelle fonction *indicatrice* ou fonction *caractéristique* de E, et on note $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}$, la fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ par $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}(x) = 1$ pour $x \in \mathrm{E}$, $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}(x) = 0$ sinon.

L'objet de ce problème est la démonstration d'un résultat sur la mesure des polyèdres obtenus comme sections d'un cube par un hyperplan (partie V). La démonstration nécessite des résultats préliminaires d'analyse qui sont établis dans les parties I et II, ainsi qu'une majoration de l'intégrale $\mathrm{J}_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^b dt$ pour $b > 2$. Cette majoration est partiellement établie dans les parties III et IV.

Les cinq parties s'enchaînent logiquement. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats établis dans les questions antérieures.

I . Transformation de Fourier

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, continue par morceaux sur tout segment de $\mathbf{R}$. On suppose que la fonction f est intégrable sur $\mathbf{R}$.

a) Démontrer que, pour tout $y \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)\, e^{-ixy}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

b) On définit une nouvelle fonction, notée $\widehat{f}$, en posant, pour tout $y \in \mathbf{R}$:

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx.$$

Démontrer que la fonction $\widehat{f}$ est bornée et continue.

2) a) Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Calculer $\widehat{f}(y)$ lorsque f est la fonction $\mathbf{1}_{[a,b]}$ indicatrice de l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbf{R}$.

b) En déduire que, si A est un nombre réel > 0, et si χ_{A} désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$ de $\mathbf{R}$, on a

$$\widehat{\chi}_{\mathrm{A}}(y) = \frac{2\,\sin \mathrm{A}y}{y} \qquad \text{pour} \quad y \in \mathbf{R},\ y \neq 0,$$
$$\widehat{\chi}_{\mathrm{A}}(0) = 2\,\mathrm{A}.$$

Tournez la page S.V.P.

II . Convolution

1) Soit A un nombre réel > 0, et soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, nulles hors de l'intervalle $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ et continues sur cet intervalle. On définit une nouvelle fonction, notée $f * g$, en posant, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

a) Vérifier que l'intégrale définissant $f * g$ a un sens, et que la fonction $f * g$ est nulle hors de l'intervalle $[-2\mathrm{A}, 2\mathrm{A}]$.

b) Démontrer que la fonction $f * g$ est continue.

2) Démontrer l'égalité

$$\chi_{\mathrm{A}} * \chi_{\mathrm{A}} = 2\,\mathrm{A}\ \Delta_{2\mathrm{A}}$$

où χ_{A} désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ de $\mathbf{R}$, et $\Delta_{2\mathrm{A}}$ la fonction définie par

$$\Delta_{2\mathrm{A}}(x) = 1 - \frac{|x|}{2\,\mathrm{A}} \quad \text{si} \quad -2\,\mathrm{A} \leqslant x \leqslant 2\,\mathrm{A}, \qquad \Delta_{2\mathrm{A}}(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 2\,\mathrm{A}.$$

3) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé Ω. On suppose que les distributions de X et Y admettent des densités, notées f et g respectivement, qui sont des fonctions à support borné, continues par morceaux.

Démontrer que, si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la distribution de la variable $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ admet pour densité la fonction $f * g$.

4) Soient f et g deux fonctions comme dans (II.1). Démontrer l'égalité

$$\widehat{(f * g)} = \widehat{f}\ \widehat{g}.$$

5) Dans la suite du problème, on utilisera le résultat suivant que l'on admettra :

Théorème de réciprocité de Fourier. — Soit f *une fonction continue sur* $\mathbf{R}$*, à support borné, à valeurs réelles. On suppose de plus que la fonction* $\widehat{f}$ *est intégrable sur* $\mathbf{R}$*. Alors, pour tout* $x \in \mathbf{R}$*, on a*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy.$$

III . Calculs d'intégrales

1) Soit b un nombre réel > 1. On pose $f_b(t) = \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|^b$ pour t réel $\neq 0$, et $f_b(0) = 1$.

Démontrer que la fonction f_b est intégrable sur $\mathbf{R}$.

Dans la suite, on note J_b la valeur de l'intégrale $\mathrm{J}_b = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)\ dt$.

Tournez la page S.V.P.

2) Rappelons que l'on a noté Δ_1 la fonction définie par

$$\Delta_1(x) = 1 - |x| \quad \text{pour} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad \Delta_1(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant 1.$$

a) En utilisant (I.2.b), (II.2) et (II.4), démontrer que l'on a

$$\widehat{\Delta}_1(y) = f_2\left(\frac{y}{2}\right).$$

b) En utilisant le théorème de réciprocité de Fourier (II.5), calculer la valeur de l'intégrale J_2.

3) a) En utilisant la définition donnée dans (II.1) de la loi $*$, calculer la valeur de $(\Delta_1 * \Delta_1)(0)$.

b) En déduire la valeur de J_4.

IV . Majoration de l'intégrale J_b pour $b \geqslant 4$

Rappelons que, si b est un nombre réel > 1, on a défini sur $\mathbf{R}$ une fonction f_b en posant $f_b(t) = \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|^b$ pour t réel $\neq 0$, et $f_b(0) = 1$, et que l'on a noté J_b la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{J}_b = \int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)\, dt.$$

Cette partie du problème est consacrée à une démonstration de la majoration

$$\mathrm{J}_b < \pi \sqrt{\frac{2}{b}} \qquad \text{pour} \quad b \geqslant 4.$$

Cette majoration sera utilisée dans la dernière partie.

1) a) En utilisant un développement en série entière, démontrer que l'on a

$$\frac{\sin t}{t} \leqslant 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} \qquad \text{pour} \quad 0 < t^2 \leqslant 72.$$

b) Démontrer de même que l'on a

$$e^{-t^2/6} \geqslant 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{72} - \frac{t^6}{1296} \qquad \text{pour} \quad t^2 \leqslant 30.$$

c) En déduire que l'on a

$$0 \leqslant \frac{\sin t}{t} \leqslant e^{-t^2/6} \qquad \text{pour} \quad 0 < t^2 \leqslant \frac{36}{5}.$$

2) Dans cette question, on suppose $b \geqslant 4$. On pose $c = 6/\sqrt{5}$. On rappelle la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

a) Démontrer que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt^2/6}\, dt + 2 \int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^b}.$$

Tournez la page S.V.P.

b) Calculer, en fonction de b, la valeur des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt^2/6}\, dt \qquad \text{et} \qquad \int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^b}\,.$$

c) Démontrer que l'on a $x - 1 \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 4$.

d) Déduire de ce qui précède la majoration

$$\mathrm{J}_b \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}} + \frac{4}{3\pi c^3}\right)$$

puis la majoration

$$\mathrm{J}_b < \pi\sqrt{\frac{2}{b}}\,.$$

Commentaire : Dans la dernière partie de ce problème, on admettra que l'inégalité $\mathrm{J}_b < \pi\sqrt{2/b}$ est valable pour tout $b > 2$.

V . Sections hyperplanes du cube

Dans cette partie, on pourra utiliser le résultat suivant : Soit n un entier $\geqslant 2$, soient $g_1, g_2, \ldots, g_n$ des fonctions positives sur $\mathbf{R}$, continues par morceaux sur tout segment de $\mathbf{R}$, et soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des nombres réels > 0 tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$. On a alors l'inégalité, dite de Hölder,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(t)\right) dt \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(t)^{p_i}\, dt\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

On désigne par n un entier $\geqslant 2$. On note $(\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $\|\vec{x}\|$ la norme euclidienne d'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$.

On suppose donné un vecteur unitaire $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbf{R}^n$. On désigne par H l'hyperplan orthogonal à $\vec{a}$. Pour tout nombre réel r, on note H_r l'hyperplan affine $\mathrm{H} + r\vec{a}$.

Le volume n-dimensionnel $v(\mathrm{A})$ d'une partie compacte A de $\mathbf{R}^n$ est donné par l'intégrale n-uple

$$v(\mathrm{A}) = \int^{(n)} \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n\ ,$$

où $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1})$ une base orthonormale de l'hyperplan H. Le volume $(n-1)$-dimensionnel $\sigma_{\mathrm{H}_r}(\mathrm{B})$ d'une partie compacte B de H_r est donné par l'intégrale $(n-1)$-uple

$$\sigma_{\mathrm{H}_r}(\mathrm{B}) = \int^{(n-1)} \mathbf{1}_{\widetilde{\mathrm{B}}}(y_1, \ldots, y_{n-1})\, dy_1 \ldots dy_{n-1}\ ,$$

où $\mathbf{1}_{\widetilde{\mathrm{B}}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\widetilde{\mathrm{B}}$ des points $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ de $\mathbf{R}^{n-1}$ tels que $r\vec{a} + y_1\vec{e}_1 + \ldots + y_{n-1}\vec{e}_{n-1}$ appartienne à B.

On admettra que, si A est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$, on a

$$v(\mathrm{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\mathrm{H}_r}(\mathrm{A} \cap \mathrm{H}_r)\, dr.$$

On note C le cube $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$, d'arête 1, centré à l'origine.

Tournez la page S.V.P.

1) Dans cette question, on suppose $1 \geqslant a_1 \geqslant 1/\sqrt{2}$. On note T le projecteur orthogonal de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est l'hyperplan $\mathrm{K} = \{0\} \times \mathbf{R}^{n-1}$, et S le projecteur orthogonal de $\mathbf{R}^n$ d'image H .

a) Démontrer les égalités

$$\mathrm{S}(\vec{\epsilon}_1) = (1 - {a_1}^2, -a_1 a_2, \ldots, -a_1 a_n), \qquad \mathrm{T}(\mathrm{S}(\vec{\epsilon}_1)) = (0, -a_1 a_2, \ldots, -a_1 a_n).$$

b) Démontrer que l'on a $\quad \sigma_{\mathrm{H}}(\mathrm{C} \cap \mathrm{H}) = \sigma_{\mathrm{K}}(\mathrm{T}(\mathrm{C} \cap \mathrm{H})) \, \dfrac{\|\mathrm{S}(\vec{\epsilon}_1)\|}{\|\mathrm{T}(\mathrm{S}(\vec{\epsilon}_1))\|} \cdot$

c) En déduire l'inégalité $\sigma_{\mathrm{H}}(\mathrm{C} \cap \mathrm{H}) \leqslant \sqrt{2}$.

2) Dans cette question, on suppose que l'on a $0 < a_i \leqslant 1/\sqrt{2}$ pour $i = 1, \ldots, n$.

On considère le cube C , muni de la mesure v , comme un espace probabilisé. Pour tout point $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ appartenant au cube C , et tout entier i , où $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $\mathrm{X}_i(\vec{x}) = x_i$. On définit ainsi des variables aléatoires *indépendantes* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sur C , ayant toutes pour densité la fonction indicatrice $\chi_{1/2}$ de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ de $\mathbf{R}$.

a) Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha \leqslant \beta$, et soit $\mathrm{C}(\alpha, \beta)$ le polyèdre constitué des points du cube C compris entre les hyperplans affines H_α et H_β .

Démontrer que la fonction f , définie par

$$f(r) = \sigma_{\mathrm{H}_r}(\mathrm{C} \cap \mathrm{H}_r) \qquad \text{pour tout nombre réel } r,$$

est la densité de la variable aléatoire $\mathrm{R} = a_1 \mathrm{X}_1 + \ldots + a_n \mathrm{X}_n$.

b) Pour $i = 1, \ldots, n$, on note f_i la densité de la variable aléatoire $a_i \mathrm{X}_i$. Démontrer que l'on a

$$\widehat{f_i}(y) = \frac{2 \sin(a_i y/2)}{a_i \, y} \cdot$$

En déduire que l'on a

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2 \sin(a_i y/2)}{a_i \, y} \right) dy.$$

c) Pour $i = 1, \ldots, n$, on pose $p_i = (1/a_i)^2$. Remarquer que l'on a $p_i \geqslant 2$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$. En appliquant l'inégalité de Hölder, démontrer l'inégalité

$$|f(0)| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\pi \, a_i} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{p_i}(t) \, dt \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

d) En admettant que l'on a $\mathrm{J}_b < \pi\sqrt{2/b}$ pour tout $b > 2$, démontrer l'inégalité

$$|f(0)| \leqslant \sqrt{2}.$$

e) Démontrer que l'égalité ne peut avoir lieu que pour $n = 2$ et $p_1 = p_2 = 2$.

3) Déduire des questions 1) et 2) que la mesure $\sigma_{\mathrm{H}}(\mathrm{C} \cap \mathrm{H})$ de la section du cube C par un hyperplan H est majorée par $\sqrt{2}$, et que cette borne n'est atteinte que par les hyperplans orthogonaux aux vecteurs $\vec{\epsilon}_i \pm \vec{\epsilon}_j$, où $i \neq j$.
